Scientific and Educational Reports of the Faculty
of Science and Technology, Kochi University
Vol. 6 (2023), No. 2

# 切稜立方体を用いた球形ユニット曲線折り紙

小松和志 Kazushi Komatsu(高知大学理工学部)
外山海仁 Kaito Toyama(高知大学理工学部)*

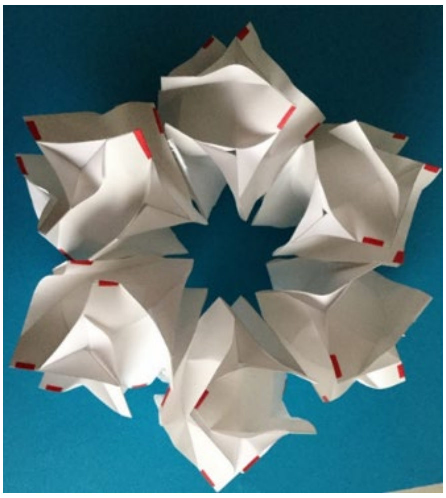
## 概要

この論文では「しぼり」と呼ばれる構造をもつ球形曲線折り紙を扱う．[2]において角の数が偶数である球面多角形から成る球面タイル貼りから，しぼりをもつ球形曲線折り紙が得られることを示した．この論文では[2]において課題として残された，より球面に近く，しぼりでリング状につなげることができる球形曲線折り紙を，外接球を持つ切稜立方体をその外接球に投影して得られる球面タイル貼りから実現する．しぼりはユニットの接続部分にもなるため，ユニット折り紙として得ることができる．

## §1．イントロダクション

筑波大学の三谷純教授により，曲線の折り目をもつ様々な立体折り紙が創られている([4],[5],[6],[7],[8])．その中に，「しぼり」と呼ばれる紙の端を重なり合わせ渦状に巻いた構造をもつものがある (例えば，８枚羽根の球体 [4],[5],[6],[7])．また，８枚羽根の球体はしぼりの部分で連結できることが知られている ([6],[7])．８枚羽根の球体の場合，折り線による球面の分割は球面二角形による球面タイル貼りとなっている．

[2]において，立方体をその外接球に投影して得られる球面タイル貼りと角が $72^\circ$ と $144^\circ$ となるような 10 個の等辺球面四角形によるタイル貼りを用いて球形曲線折り紙が得られた．下左図は前者の球形曲線折り紙 6 個をしぼりでリング状に連結したものであり，下右図は後者の球形曲線折り紙である．



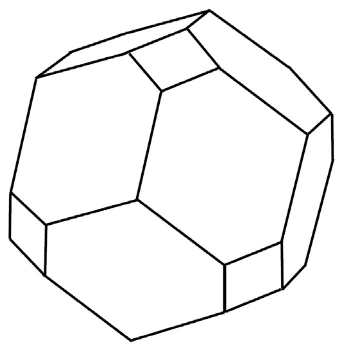
立体折りを折るのに適した球面タイル貼りはどんなものであると考えられるだろうか．対称性が高いことは勿論であるが，実際に折るという観点から次の条件は重要であると思われる．

*2022 年度 3 月高知大学理工学部数学物理学科数学コース卒業

(1)使う球面 $n$ 角形タイルの $n$ は小さい方が良い.
(2)タイルの数が多すぎるのは折るのが難しい.
(3)頂点への面の集まり方は適正数で同じ角度が良い.

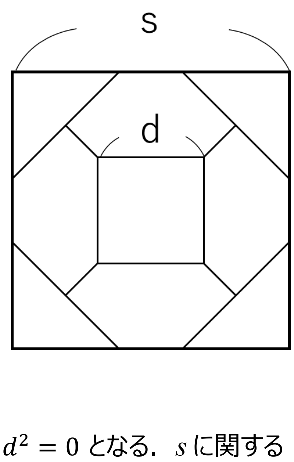
さらに，球形曲線折り紙同士をしぼりでリング状につなげていくためには，それらのしぼりが正多角形の形であり，適切な位置関係にあることが必要となる．私たちは外接球を持つ切稜立方体をその外接球に投影して得られる球面タイル貼りを採用する.

切稜立方体（Chamfered cube）とは，2000 年に中川宏氏が製作した 18 面体である([1]). 立方体の辺に平行な平面によって辺を含む三角柱部分を切り離す操作を，12 本の辺に対して一様に行うことによって得られる下図のような凸多面体である．その面は 6 個の正方形と 12 個の対辺が平行な 6 角形から成る.



このような切稜立方体が外接球を持つための条件は，元の立方体の一辺を s，切り出した後の正方形の面の一辺を $d$ として考えると，$s = 5d$ を満たすときとなる．以下でそれを示す.

外接球を持つ条件の証明




右図のように，元の立方体の一辺を s，切り出した後の正方形の面の一辺を $d$ とする($s$, $d \geqq 0$)．このとき，立方体の中心を原点としたときに正方形の面と六角形の面の一つの頂点の座標がそれぞれ，
正方形の面：$\left(\frac{d}{2}, \frac{d}{2}, \frac{s}{2}\right)$，六角形の面：$\left(\frac{s+d}{4}, \frac{s+d}{4}, \frac{s+d}{4}\right)$ となるように座標系をとる([1])．これらが原点を中心とする半径 $r$ の球上にあるので，次が等式①, ②が成り立つ.

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = r^2, \quad \cdots ①$$

$$\left(\frac{s+d}{4}\right)^2 + \left(\frac{s+d}{4}\right)^2 + \left(\frac{s+d}{4}\right)^2 = 3\left(\frac{s+d}{4}\right)^2 = r^2. \quad \cdots ②$$

等式①, ②により,

$2\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = 3\left(\frac{s+d}{4}\right)^2$ を得る．計算して整理すると，$s^2 - 6sd + 5d^2 = 0$ となる．$s$ に関する 2 次方程式と見なして，これを解くと $s = d$ , $5d$ を得る．ここで，$s = d$ は切り出しを行っていない状態のことなので，切稜立方体が外接球を持つための条件は $s = 5d$ ($s, d \geqq 0$)である.

私たちは次の結果を得た.

結果

外接球を持つ切稜立方体をその外接球に投影して得られる球面タイル貼りから，6 個をしぼりで連結することでリング状にできる球形曲線折り紙を製作することができる．さらに，球形曲線折り紙自体，しぼりをユニットの接続部分にして，ユニット折り紙として制作することができる.

ユニット折り紙とは，ユニットと呼ばれる比較的簡単な構造を作り，それらを複数個組み合わせて形を作るタイプの折り紙のことである．[2]においては，球形曲線折り紙もそのリング状への連結したものも 1 枚の紙から製作されている．ユニット折り紙にすることは，制作の難易度を下げることにつながる.

また，[2]において，立方体をその外接球に投影して得られる球面タイル貼りから，球形曲線折り紙が得られているが．それは「球体というよりは，少しだけ膨らんだ立方体にしか見えない.」と述べられている. 立方体及び切稜立方体をその外接球に投影して得られる球面タイル貼りはともに頂点へ集まる面の数が 3 である．一方で，面の総数は 6 から 18 に増え，投影する前の多面体の段階でより球面に近い見た目をもつことになった．このことが，実際に制作された球形曲線折り紙が立方体の場合より球面に近い見た目をもつことになった理由のひとつではないかと考えられる.

## §2. 結果の証明

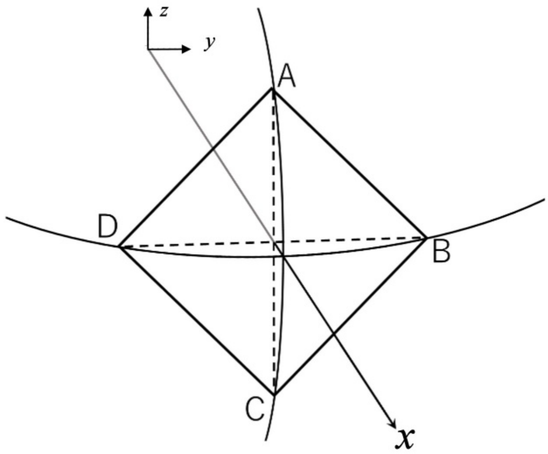
先ず,しぼりでリング状につなげることができる球形曲線折り紙を実際に製作するやり方を説明する.最小単位となるのは,球面六角形と球面正方形を平面上に引き延ばして描かれる辺が曲線であるような六角形と正方形を長方形の中に描いたものである.以降,これらをそれぞれ単に六角形の面と正方形の面と呼ぶことにする.

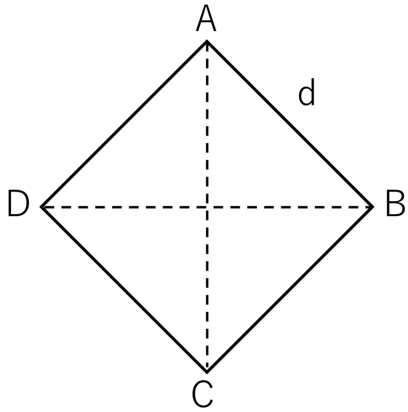
実際に各面の曲線を求めていく.今回は 2 種類の球面多角形から成るタイル貼りを元にしているので,曲面を平面上に引き延ばす方法として[2]とは異なるサンソン図法(cf.[3])を参考にした方法を採用する. 先ず,原点中心で半径 1 の球を外接球に持つような切稜立方体の正方形の面の辺な長さ $d$ を求める.外接球の関数は外接球を持つ条件の証明における①および $s = 5d$ より,

$$2\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{5d}{2}\right)^2 = 1.$$

これを計算すると

$$d = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad (\because d \geq 0).$$




次に,球面正方形の座標を考える.サンソン図法を合わせやすいように,上左図のように座標を取ることを考える.ここで,点 A,B,C,D は原点中心で半径 1 の球上にあり,四角形 ABCD は一辺が $d$ の正方形である.このとき,それぞれの座標を次のようにおく.

$$\mathrm{A}:(i,0,j),\mathrm{B}:(i,j,0),\mathrm{C}:(i,0,-j),\mathrm{D}:(i,-j,0)(0\leq i,j\leq 1)$$

このとき, △ABD において三平方の定理 $\mathrm{DA}^2+\mathrm{AB}^2=\mathrm{BD}^2$ より,

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)^2=(2\mathrm{j})^2.$$

これを計算すると

$$j=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{9}\ (\because j\geq 0).$$

これらより,点 A,B,C,D は $x^2+y^2+z^2=1$ 上にあることから,特に点 A について,

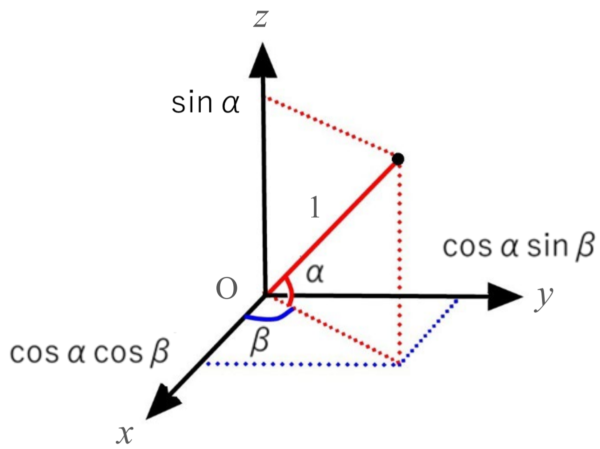
$$i^2+0^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{9}\right)^2=1.$$

これを計算すると

$$i=\frac{5}{3\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{9}\ (\because i\geq 0).$$

以上より,点 A,B,C,D それぞれの座標は, 次のようになると分かった.

$$\mathrm{A}:\left(\frac{5\sqrt{3}}{9},0,\frac{\sqrt{6}}{9}\right),\mathrm{B}:\left(\frac{5\sqrt{3}}{9},\frac{\sqrt{6}}{9},0\right),\mathrm{C}:\left(\frac{5\sqrt{3}}{9},0,-\frac{\sqrt{6}}{9}\right),\mathrm{D}:\left(\frac{5\sqrt{3}}{9},-\frac{\sqrt{6}}{9},0\right)$$




次に,これらを極座標に変換し曲線を求めることを考える.サンソン図法を参考にして，上図のように α を動径と $xy$ 平面のなす角，β を動径の $xy$ 平面への射影と $x$ 軸のなす角とし，極座標を次のように取る.

$$(x, y, z)=(\cos\alpha\cos\beta, \cos\alpha\sin\beta, \sin\alpha)\ \left(-\frac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2},\ -\pi\leq\beta\leq\pi\right)$$

このとき,それぞれの点の極座標は次のようになる.

(1)点 A,C において

$$(\cos\alpha\cos\beta, \cos\alpha\sin\beta, \sin\alpha) = \left(\frac{5\sqrt{3}}{9}, 0, \pm\frac{\sqrt{6}}{9}\right).$$

これを解くと $\alpha = \pm 0.2756\cdots\left(\text{約} \pm 15.8°\right), \beta = 0.$

(2)点 B,D において，図の対称性より，直ちに $\alpha = 0, \beta = \pm 0.2756\cdots\left(\text{約} \pm 15.8°\right).$

また,これらからそれぞれの曲線における α，β の範囲は次のようになる(小数値は小数点以下 4 桁目を四捨五入して用いることとする).

曲線 AB：$0 \leq \alpha \leq 0.276, 0 \leq \beta \leq 0.276$，曲線 BC：$-0.276 \leq \alpha \leq 0, 0 \leq \beta \leq 0.276$

曲線 CD：$-0.276 \leq \alpha \leq 0, -0.276 \leq \beta \leq 0$，曲線 DA：$0 \leq \alpha \leq 0.276, -0.276 \leq \beta \leq 0$

次に,特に曲線 AB について,原点と点 A,B の 3 点を通る平面の式を求める.そのために,ベクトル A,B に対する法線ベクトルを考えると,

$$(x, y, z) = \left(0\cdot 0 - \frac{\sqrt{6}}{9}\cdot\frac{\sqrt{6}}{9}, \frac{\sqrt{6}}{9}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{9} - \frac{5\sqrt{3}}{9}\cdot 0, \frac{5\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{\sqrt{6}}{9} - 0\cdot\frac{5\sqrt{3}}{9}\right)$$

$$= \left(-\frac{2}{27}, \frac{5\sqrt{2}}{27}, \frac{5\sqrt{2}}{27}\right).$$

よって,平面の式は次のように求められる.

$$-\frac{2}{27}x+\frac{5\sqrt{2}}{27}y+\frac{5\sqrt{2}}{27}z=0$$

$$\therefore z=\frac{\sqrt{2}}{5}x-y$$

最後に,これに極座標を代入し,サンソン図法によって平面に引き延ばして曲線を求める.

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{5}\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

整理して,

$$\sin\alpha=\cos\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\cos\beta-\sin\beta\right)$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{5}\cos\beta-\sin\beta\ \ (\because 0\le\alpha\le 0.276)$$

$$\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{5}\cos\beta-\sin\beta$$

$$\therefore\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\cos\beta-\sin\beta\right)\ (0\le\beta\le 0.276).$$

以上より,半径を 1 としたサンソン図法によって平面に引き延ばしたときの曲線 AB の式は,以下のようなβを媒介変数とする式で表される.

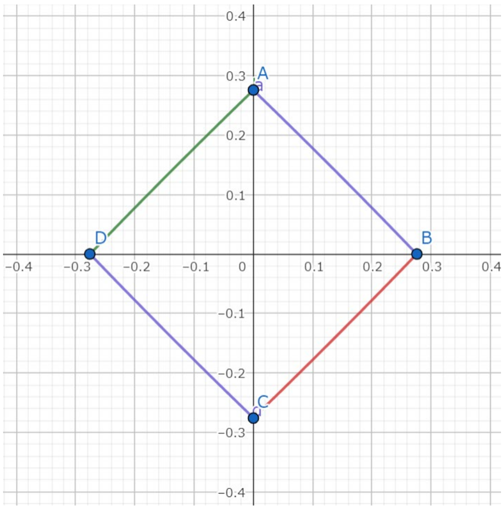
$$\left(\beta\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\cos\beta-\sin\beta\right)\right),\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\cos\beta-\sin\beta\right)\right)\ (0\le\beta\le 0.276)$$

曲線 BC,CD,DA についても同様に求めると,次のような式になる.

曲線 BC：$\left(\beta\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\cos\beta-\sin\beta\right)\right),-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\cos\beta-\sin\beta\right)\right)\ (0\le\beta\le 0.276)$

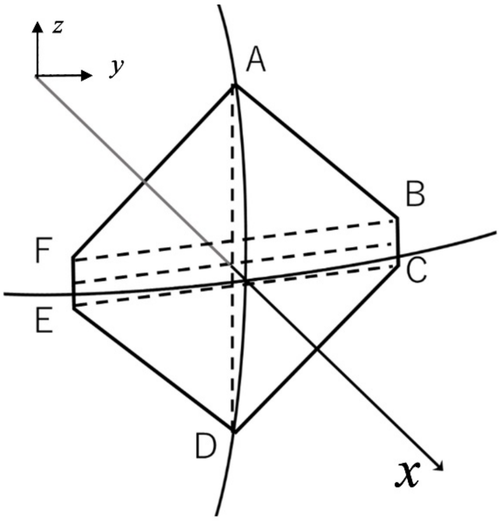
曲線 CD：$\left(-\beta\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\cos\beta-\sin\beta\right)\right),-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\cos\beta-\sin\beta\right)\right)\ (0\le\beta\le 0.276)$

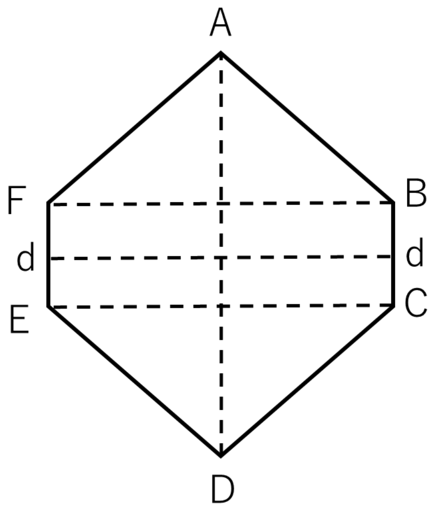
曲線 DA：$\left(-\beta\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\cos\beta-\sin\beta\right)\right),\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\cos\beta-\sin\beta\right)\right)\ (0\le\beta\le 0.276)$




これらの曲線を GeoGebra で描画すると左図のような膨らんだ正方形が得られる.

次に,六角形の面についても正方形の面と同様の方法で考える.




先ず,球面六角形の座標を考える.サンソン図法を合わせやすいように, 上左図のように座標を取ることを考える.ここで,点 A,B,C,D,E,F は原点中心で半径 1 の球上にあり, 辺 BC, EF の長さは $d$ である.このとき, それぞれの座標を

$$\mathrm{A}:(i,0,k),\mathrm{B}:\left(i,j,\frac{d}{2}\right),\mathrm{C}:\left(i,j,-\frac{d}{2}\right),\mathrm{D}:(i,0,-k),\mathrm{E}:\left(i,-j,-\frac{d}{2}\right),\mathrm{F}:\left(i,j,-\frac{d}{2}\right)\ (0\leq i,j,k\leq 1)$$

とする.このとき,線分 BF の長さを外接の条件を求めたときに使用した座標から考えると

$$\mathrm{B}:\left(\frac{d}{2},\frac{s}{2},\frac{d}{2}\right),\mathrm{F}:\left(\frac{s}{2},\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)$$

として,

$$\mathrm{BF}^2=\left(\frac{s}{2}-\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}-\frac{s}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}-\frac{d}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{5d}{2}-\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}-\frac{5d}{2}\right)^2\ (\because s=5d)$$

$$=8d^2$$

$$\therefore \mathrm{BF}=2\sqrt{2}d(\because \mathrm{BF}\geq 0).$$

したがって,

$$j=\frac{BF}{2}=\sqrt{2}d=\frac{2\sqrt{6}}{9}.$$

点 B は $x^2+y^2+z^2=1$ 上にあることから，代入して,

$$i=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}(\because i\geq 0).$$

点 A は $x^2+y^2+z^2=1$ 上にあることから, 代入して,

$$k=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}(\because k\geq 0).$$

以上より,点 A,B,C,D,E,F それぞれの座標は,

$$\mathrm{A}：\left(\frac{\sqrt{6}}{3},0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ \mathrm{B}：\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{9},\frac{\sqrt{3}}{9}\right),\ \mathrm{C}：\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{9},-\frac{\sqrt{3}}{9}\right),$$

$$\mathrm{D}：\left(\frac{\sqrt{6}}{3},0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ \mathrm{E}：\left(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{9},-\frac{\sqrt{3}}{9}\right),\ \mathrm{F}：\left(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{9},\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$$

となると分かった.

このとき,それぞれの点の極座標は次のようになる.

(1)点 A,D において

$$(\cos\alpha\cos\beta,\cos\alpha\sin\beta,\sin\alpha)=\left(\frac{\sqrt{6}}{3},0,\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

これを解くと $\alpha=\pm 0.6154\cdots\left(約\ 35.3°\right),\beta=0.$

(2)点 B,C,E,F において

$$(\cos\alpha\cos\beta,\cos\alpha\sin\beta,\sin\alpha)=\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\pm\frac{2\sqrt{6}}{9},\pm\frac{\sqrt{3}}{9}\right).$$

これを解くと $\alpha=\pm 0.1936\cdots\left(約\pm 11.1°\right),\beta=\pm 0.5880\cdots\left(約\ 33.7°\right).$

また,これらからそれぞれの曲線における α, β の範囲は次のようになる(小数値は小数点以下 4 桁目を四捨五入して用いることとする).

$$\text{曲線 AB}：0.194 \le \alpha \le 0.615, 0 \le \beta \le 0.588, \text{曲線 BC}： - 0.194 \le \alpha \le 0.194, \beta = 0.588$$

$$\text{曲線 CD}： - 0.615 \le \alpha \le -0.194, 0 \le \beta \le 0.588,$$

$$\text{曲線 DE}： - 0.615 \le \alpha \le -0.194, -0.588 \le \beta \le 0, \text{曲線 EF}： - 0.194 \le \alpha \le 0.194, \beta = -0.588,$$

$$\text{曲線 FA}：0.194 \le \alpha \le 0.615, -0.588 \le \beta \le 0$$

次に,特に曲線 AB について,原点と点 A,B の 3 点を通る平面の式を求める.そのために,ベクトル A,B に対する法線ベクトルを考えると,

$$(x, y, z) = \left(0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{9}, \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{9}, \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{9} - 0 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$= \left(-\frac{6\sqrt{2}}{27}, \frac{3\sqrt{2}}{9} - \frac{\sqrt{2}}{9}, \frac{12}{27}\right) = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{9}, \frac{2\sqrt{2}}{9}, \frac{4}{9}\right).$$

よって,平面の式は

$$-\frac{2\sqrt{2}}{9}x + \frac{2\sqrt{2}}{9}y + \frac{4}{9}z = 0$$

$$\therefore z = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y.$$

これに極座標を代入して

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\cos\beta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\sin\beta$$

整理して,

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\,(\cos\beta - \sin\beta)$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\beta - \sin\beta)\ (\because 0.194 \le \alpha \le 0.615)$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\beta - \sin\beta)$$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\beta - \sin\beta)\right)\ (0 \le \beta \le 0.588).$$

以上より,半径を 1 としたサンソン図法によって平面に引き延ばしたときの曲線 AB の式は,以下のようなβを媒介変数とする式で表される.

$$\left(\beta\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\beta - \sin\beta)\right)\right), \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\beta - \sin\beta)\right)\right)\ (\,0 \le \beta \le 0.588)$$

曲線 CD,DE,FA についても同様に求めると次のようになる.

$$曲線 CD: \left(\beta\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\beta - \sin\beta)\right)\right), -\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\beta - \sin\beta)\right)\right) \ (0 \leq \beta \leq 0.588)$$

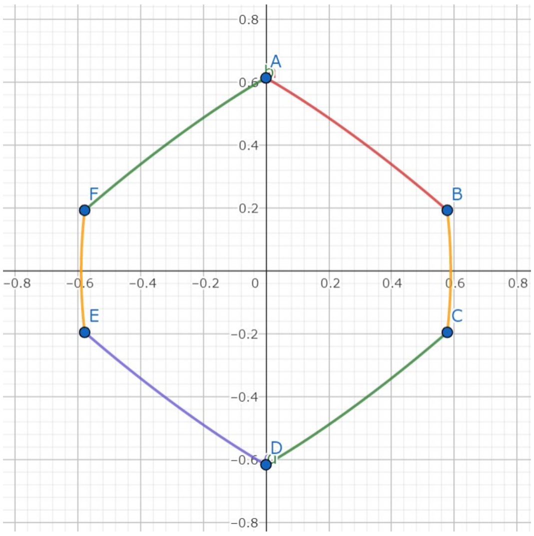
$$曲線 DE: \left(-\beta\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\beta - \sin\beta)\right)\right), -\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\beta - \sin\beta)\right)\right) \ (0 \leq \beta \leq 0.588)$$

$$曲線 FA: \left(-\beta\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\beta - \sin\beta)\right)\right), \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\beta - \sin\beta)\right)\right) \ (0 \leq \beta \leq 0.588)$$

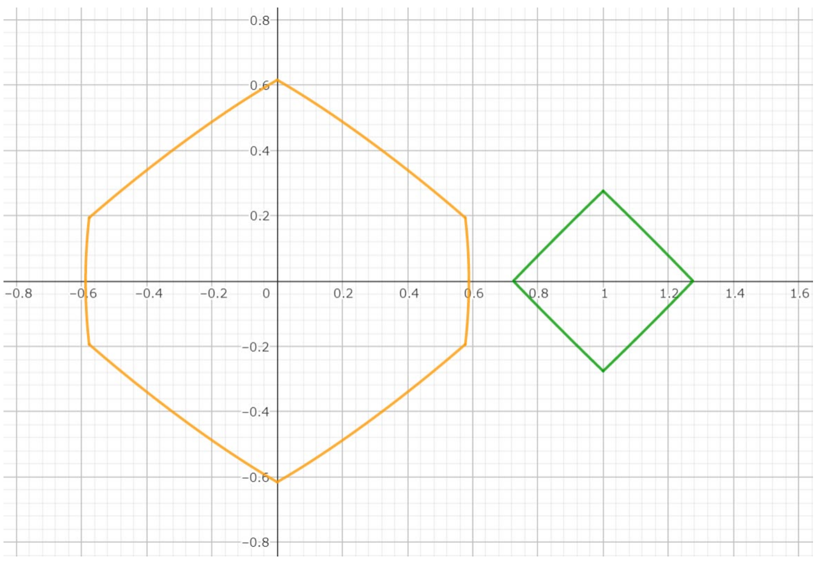
また,曲線 BC,EF についてはβ=±0.588 で一定であるので,サンソン図法より

$$x = \pm 0.588\cos\alpha \ (-0.194 \leq \alpha \leq 0.194)$$

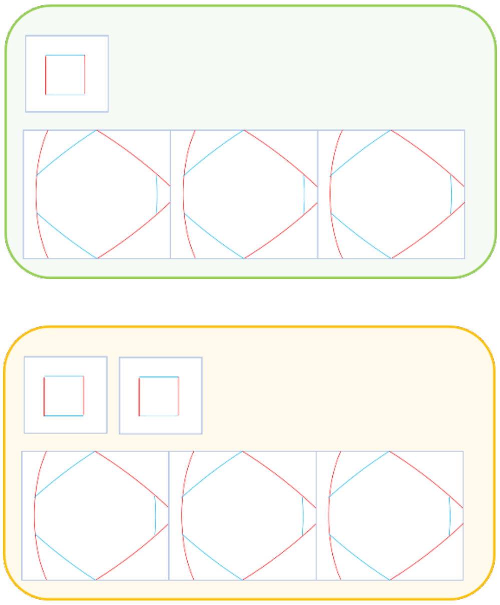
で表される.

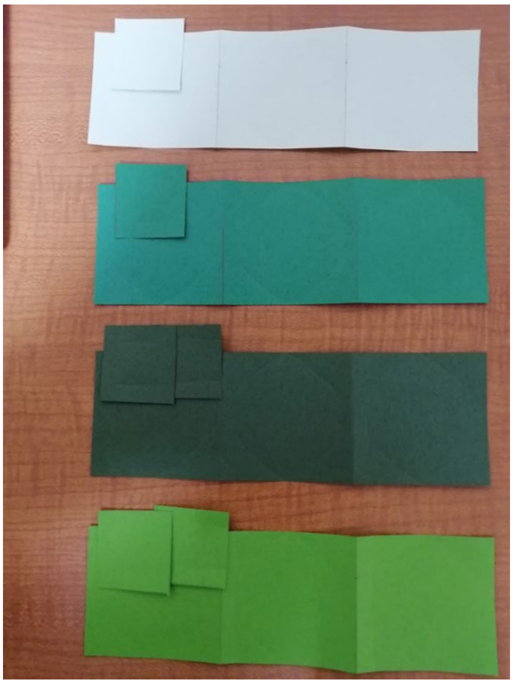



以上の曲線を GeoGebra で描写すると,左図のような膨らんだ六角形が得られる.また,正方形の面と六角形の面の大きさは下図のようになっている.

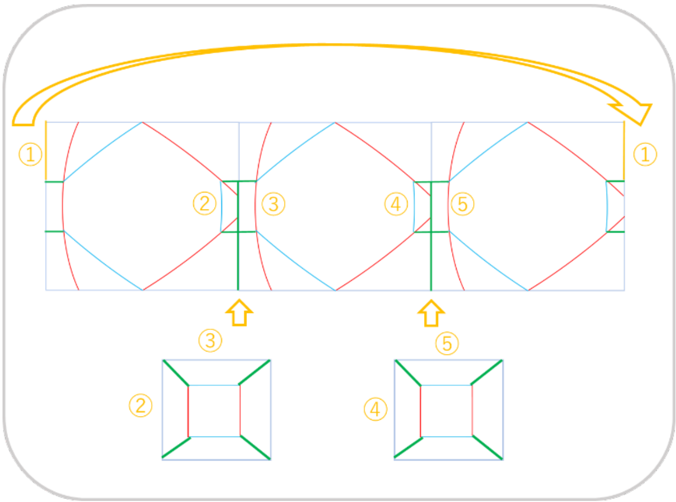


上記の方法で作られたパーツを用い，ユニットは下左図の囲みのような 2 種類の構成：六角形の面が 3 つと正方形の面が 1 つ，六角形の面が 3 つと正方形の面が 2 つを考える．下右図のようにこれらを 2 セットずつ用意する(赤い線が谷折り,青い線が山折りとする)．

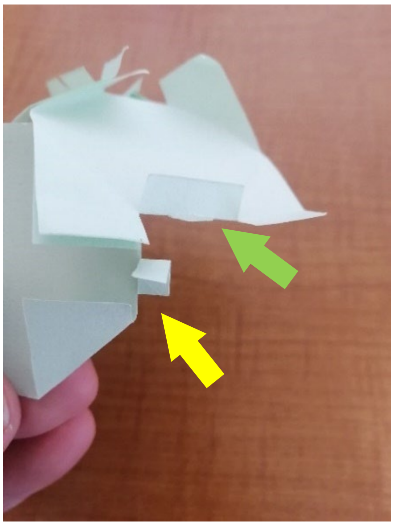
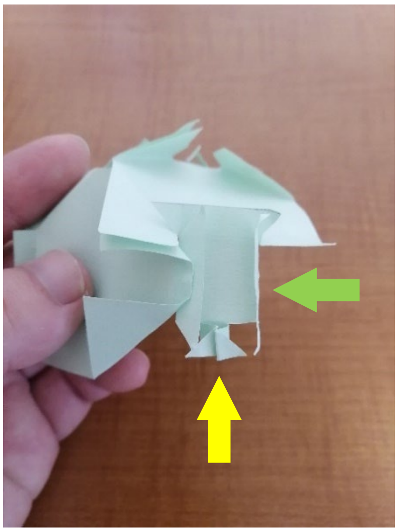




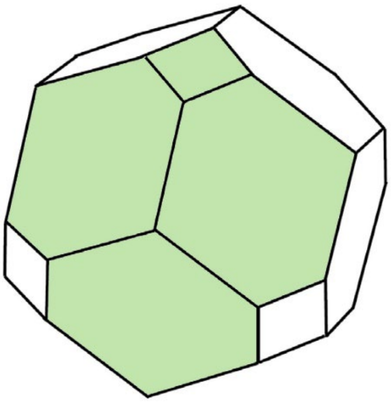
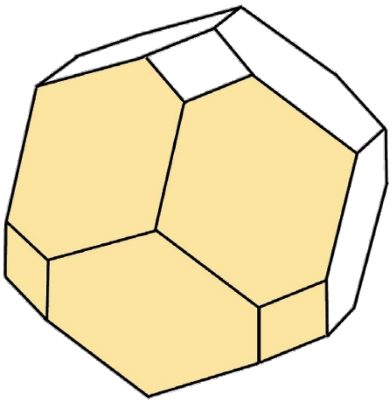
これらを下図のように，緑の線の所に切り込みを入れ,①は重なるように,②～⑤は切れ目にはめ込むようにつなげ,テープ等で固定して組み立てる.



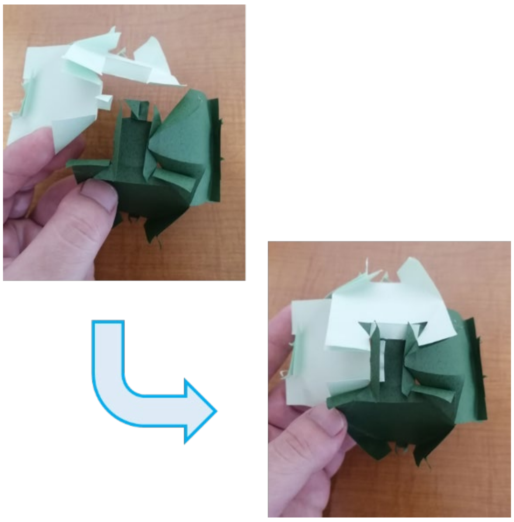

さらに次の 2 つの図のように,それぞれの面のパーツがつながっていない所を,一方には切れ込み,もう一方は折りたたむように加工し,ユニット同士をつなげるための接続部分を作成する(緑の矢印が切れ込み,黄色の矢印が折りたたみの部分を指す).

各ユニットの組み立て後の形はそれぞれ下図の色付け部分のようになる．

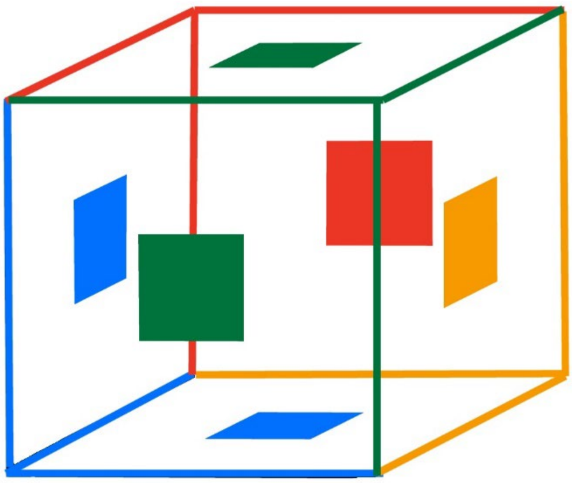
それぞれのユニットを組み立てた後，右図のように，折りたたみの部分を切り込みの部分に差し込むことで全体を組み立てる．
この展開図では，ユニットにしたことで，
・組み立てが簡単
・分解も可能
という利点があり，今までのものと比べ，とても扱いやすいものとなった．
下図が実際に組み立てたものである．



組み立て後

反対側

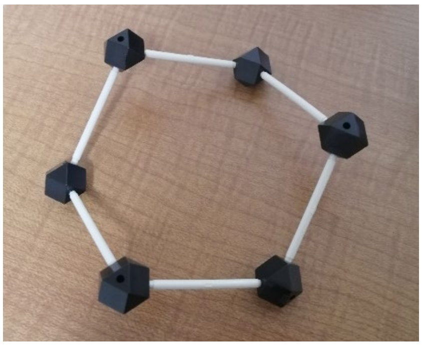
各ユニットをどのように組み立てるかを図示しておく．切り出しを行う前の立方体をモデルにして，下図のように，立方体の各面に描かれた正方形は切り出し後の切稜立方体の正方形を表し，各辺は切り出し後の切稜立方体の六角形を表す．



この図では，正方形の面を 1 つ含むユニット 2 セット(オレンジ色，赤色)と正方形の面を 2 つ含むユニット 2 セット(緑色，青色)の組み立て方を図示している．

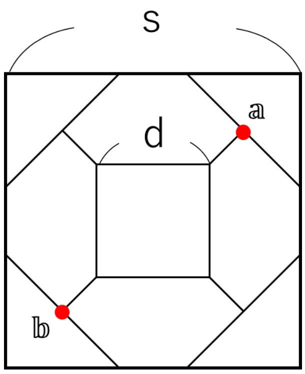
できあがった球形曲線折り紙には六角形の面が集まる，正多角形の形をもつしぼりが 8 箇所あることが分かる．この 8 箇所のうち，ユニット内にできるしぼり(上図でいうと，同じ色をもつ 3 つの六角形の面が集まるしぼり)が 4 箇所ある．このしぼりで，次の図のように 6 個の球形曲線折り紙を連結してリング状にできる．

このことを証明するためには，しぼりで 2 個の球形曲線折り紙を連結したときの連結の角度が正四面体角となることを示せば十分である.「シクロヘキサンの立体配座」と同じ配置で，6 個をしぼりで連結することでリング状にできることになる.



シクロヘキサンの立体配座：いす形の分子模型

連結の角度が正四面体角となることの証明




外接球を持つ条件の証明と同様に，右図のように，元の立方体の一辺を s，切り出した後の正方形の面の一辺を d とする(s, d ≧ 0)．また，立方体の中央を原点，連結する場所をそれぞれ 𝕒 $= (a_1, a_2, a_3)$，𝕓 $= (b_1, b_2, b_3)$ とし，符号を考慮して座標を考えると，

𝕒：$\left(\frac{s+d}{4}, \frac{s+d}{4}, \frac{s+d}{4}\right)$，𝕓：$\left(-\frac{s+d}{4}, -\frac{s+d}{4}, \frac{s+d}{4}\right)$

と表すことができる.

したがって，連結の角度が正四面体角となることを示すには，これらのベクトル𝕒，𝕓 が原点で成す角が$\cos\theta = -\frac{1}{3}$ を満たすことを示せばよい.

$L = (s+d)/4$ とおく.

$$\cos\theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$= \frac{L \cdot (-L) + L \cdot (-L) + L \cdot L}{\sqrt{L^2 + L^2 + L^2}\sqrt{(-L)^2 + (-L)^2 + L^2}}$$
$$= -\frac{L^2}{3L^2} = -\frac{1}{3}$$
$$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{3}$$

よって，ベクトル$\mathbb{a}$，$\mathbb{b}$ が原点で成す角は $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ を満たすので，連結の角度は正四面体角になる.

## 参考文献


[1] 佐藤郁郎,中川宏, 多面体木工（増補版）, NPO 法人 科学協力学際センター (2011)

[2] 星志津李, 小松和志, 球面タイル貼りを用いた「しぼり」をもつ球形曲線折り, 高知大学理工学部紀要, 第 5 巻 (2022), No. 7

[3] 政春尋志，地図投影法，朝倉書店 (2011)

[4] 三谷純，ふしぎな球体・立体折り紙，二見書房 (2009)

[5] 三谷純，立体ふしぎな折り紙，二見書房 (2011)

[6] 三谷純，立体折り紙アート 数理がおりなす美しさの秘密，日本評論社 (2015)

[7] 三谷純，曲線が美しい立体折り紙 (レディブティックシリーズ no.4463)，ブティック社 (2017)

[8] 三谷純，曲線 折り紙デザイン 曲線で折る７つの技法，日本評論社(2018)