Scientific and Educational Reports of the Faculty
of Science and Technology, Kochi University
Vol. 5 (2022), No. 9

多角形の一直線上への折り畳みについての覚書
(A short note on the folding of polygons into a straight line)

小松和志 Kazushi Komatsu (高知大学理工学部)
八木潤 Jun Yagi (高知工業高等専門学校ソーシャルデザイン工学科)

概要

多角形の辺の間の角度を変えることによる変形を考える．変形においては，重なることや自己交差することも許すものとする．全ての辺を一直線上に折り畳むことが出来るような多角形とその折り畳み方について研究する．

Abstract

We consider a transformation of a polygon which changes the angle between the edges. Assume that the transformation admits to overlap and self-intersect. We study polygons whose all edges can be folded into a straight line, and how to fold them.

§1. イントロダクション

多角形を平面上の閉じたチェイン(またはリンク機構)とみなす．すなわち，辺を長さが伸び縮みしないバーやリンク，頂点をジョイントとみなす．ここで，多角形を変形する際，重なることや自己交差することも許すものと仮定する．[4]のように，私たちは chain を扱う際にはこの仮定をしている．この仮定をしないときは平面上の chain の様々な折り畳み問題は格段に難しいものとなる (例えば，Harborth's problem [1],carpenter's rule problem [2])．

最初に，全ての辺を一直線上に折り畳むことができる多角形として，偶数個の角をもつ正多角形を見よう．これは，ジグザクに(すなわち必ず頂点のたびに)折り畳むことことにより，全ての辺を一直線上に折り畳むことができ，折り畳まれて得られる線分は正多角形の 1 辺と同じ長さをもつ．辺の長さやその順序によっては必ずしもそうとは限らないが，近しい長さの辺から成る多角形を折り畳む際に，折り畳まれて得られる線分の長さを短くする折り畳み方として，ジグザクに折り畳むやり方を考慮にいれるのは自然であると考えられる．正多角形について見たことは，次の結果のように拡張される．

<u>定理</u>

(1) n を偶数とする． n 角形が内接円をもつならば, その n 角形はジグザクに(すなわち必ず頂点のたびに)折り畳むことにより，全ての辺を一直線上に折り畳むことができる．

(2) n を奇数とする． n 角形が内接円をもつならば, 内接点のうちのひとつを頂点に追加して $n+1$ 角形とみなすと，ジグザクに折り畳むことにより，全ての辺を一直線上に折り畳むことができる．

ここで，多角形の内接円とは，その多角形の内部にあり全ての辺に接する円のことをいう．

多角形が内接円をもつならば，その多角形は凸であることがいえる．また，正多角形は内接円をもつので上の定理は，正多角形の場合に見たことの拡張になっている．

多角形が全ての辺を一直線上に折り畳むことができるならば，折り畳んでいるところの頂点の個数は偶数である．何故ならば，多角形の周を一回りすることを，折り畳んだ後でしようとすると，出発した辺の向きに戻るためには偶数回の方向転換が必要になるからである．そのため，n を奇数とするとき，n 角形はジグザクに折り畳むことにより，全ての辺を一直線上に折り畳むことはできない. 折り畳み方をジグザグと限らなければ， 内接円をもち，全ての辺を一直線上に折り畳むことができるものが存在する。例えば、辺の長さが順に，3,5,7,9,6 の凸五角形がそうである.

作図ツール GC(Geometric Constructor)を用いることで内接円をもつ多角形の例を容易に描くことができる．[6],[7]において，$n=4$ のときが教材として取り上げられている．

動的な数学ソフトウェア GeoGebra を用いることで，変形することができるリンク機構を描くことができる．web で検索するとそのような例をたくさん見つけることができる．特に，$n=4$ のときにあたる 4 節リンク機構は自由度 1 をもつため，一番取り扱われているようである．（例えば，GeoGebra サイトの教材ページや｢GeoGebra と Cinderella｣ の H01 4 節リンク機構 (https://sites.google.com/site/geogebratocinderella/shi-li/link)）

§2. 定理の証明

定理の証明のために，次の補題 1, 2 を準備する．

補題 1

n 角形の辺長を反時計回りに $a_1, a_2, \ldots, a_n$ とする． n 角形を折り畳むことにより，全ての辺を一直線上に折り畳むことができるための必要十分条件は次の条件（＊）を満たすことである：

条件(＊)：

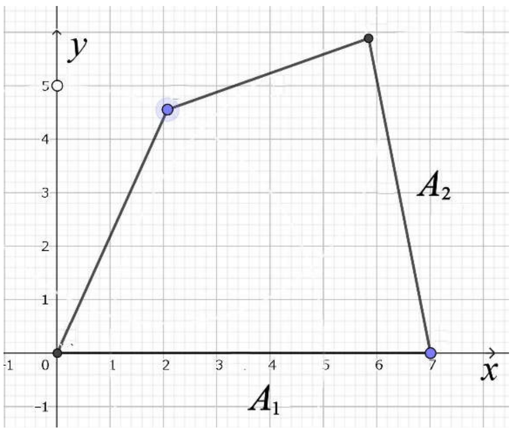
任意の $1 \le k \le n$ に対して，$\epsilon_k = -1$ または 1 が存在して，$\epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2 + \cdots + \epsilon_n a_n = 0$ となる．

ϵ_k の列 $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ において ϵ_k の符号が変わるときにそのある頂点では折り畳むことになる．

補題 1 の証明

全ての辺を一直線上に折り畳むことができるならば，条件(＊)を満たすことは，折り畳んだ後の状態から明らかである．

逆に，条件(＊)を満たすならば，全ての辺を一直線上に折り畳むことができることを示そう． A_i を辺長が a_i で表される辺を表すこととする ($i = 1, 2, \cdots, n$)．また，$\epsilon_1 = 1$ と仮定しても一般性を失わない．辺 A_1 を右図のように原点



$n=4$ のときの図 (GeoGebra で作成した図に記号 A_1, A_2 と x 軸, y 軸の表記を挿入)

から x 軸の正の方向に固定する．辺 $A_2, A_3, \cdots$ を ϵ_k の符号に従って x 軸上へ折り畳んでゆく．まず，辺 A_2 を x 軸上へ折り畳むことを考える．条件(＊)より $a_1+\varepsilon_2 a_2=\sum_{i=3}^{n}-\varepsilon_i a_i$ である．このことより，辺 $A_n, A_{n-1}, \cdots, A_3$ から成る(閉じていない)チェインにおいて，原点以外の端点の到達範囲は x 軸の点 ($a_1+\varepsilon_2 a_2$, 0) を含むことが分かる．このチェインの端点の到達範囲は原点を中心とした円環形(アニュラス)または円盤形となることが知られている([3, p.60 (日本語訳 p.66)])．このとき，辺 A_2 の折り畳む前の端点と折り畳んだ後の端点($a_1+\varepsilon_2 a_2$, 0) を結ぶ折り畳みの軌跡である円弧がその円環形または円盤形の中に含まれていることを見ることができる．よって辺 A_2 を x 軸上へ折り畳むことができる．辺 A_k を x 軸上へ折り畳むことができることは，条件(＊)より $\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i a_i=\sum_{i=k+1}^{n}-\varepsilon_i a_i$ が得られるので，同様に示される．辺 A_{n-3} を x 軸上へ折り畳んだとき， $\sum_{i=1}^{n-3}\varepsilon_i a_i=0$ ならば，その時点で残りの辺 A_{n-2}, A_{n-1}, A_n は一直線上にあるので，x 軸上へ折り畳むことができる． $\sum_{i=1}^{n-3}\varepsilon_i a_i\neq 0$ ならば，辺 A_{n-2} を x 軸上へ折り畳むときに，同時に A_{n-1}, A_n も x 軸上へ折り畳まれる。 （証明終了）

<u>補題 2</u>

n 角形の辺長を反時計回りに $a_1, a_2, \ldots, a_n$ とする．この多角形が内接円をもつための必要十分条件は、連立方程式 $x_1+x_2=a_1$, $x_2+x_3=a_2$, … , $x_n+x_1=a_n$ が正の実数解 $(x_1,\ldots,x_n)$ を持つことである．

1992 年の IMO の Shortlisted Problems の第 8 問に補題 2 に関連した 1992 角形についての問題がある[4, p.269]. この問題に対する解説は 1992 角形の代わりに一般の n 角形の場合に補題 2 の内容で与えられている[4, p.561].

<u>定理の証明</u>

n 角形の辺長を反時計回りに $a_1, a_2, \ldots, a_n$ とする．補題 2 より，正の実数 $x_1,\ldots,x_n$ が存在して， $a_1=x_1+x_2$, $a_2=x_2+x_3$, … , $a_n=x_n+x_1$ と表すことができる．

(1) このとき，k が奇数のとき $\epsilon_k=1$ ，k が偶数のとき -1 とすると, $\epsilon_1 a_1+\epsilon_2 a_2+\cdots+\epsilon_n a_n=0$ を満たしている．補題 1 より，全ての辺を一直線上に折り畳むことができる． ϵ_k の列 $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ において ϵ_k の符号が変わるときに折り畳むので，ジグザクに折り畳むことになる．

(2) 辺長 a_n をもつ辺にある内接点を頂点に追加して，反時計回りに辺長 a_1 , a_2 , … , a_{n-1} , x_n , x_1 をもつ $n+1$ 角形とみなす．そのとき， $a_1-a_2+\cdots-a_{n-1}+x_n-x_1=0$ となるので，補題 1 により，ジグザクに折り畳むことにより，全ての辺を一直線上に折り畳むことができる．

(定理の証明終了)

§3. 今後の課題と展望

補題 1 は多角形が凸でなくても，同様の証明で成立する．そのため，補題 2 の連立方程式が正の解をもつような辺長の n 角形(n は偶数，凸でなくてよい)はジグザクに折り畳むことにより，全ての辺を一直線上に折り畳むことができる．また，定理の逆は成り立たない．内接円をもつために必要な辺長の条件が補題 2 で与えられているが，1 つの辺の長さが隣り合った 2 つの辺の長さの和以上であれば，その条件は満たされない．実際，そのような多角形であるため内接円をもたないが，ジグザクに折り畳むことにより，全ての辺を一直線上に折り畳むことができ，折り畳まれて得られる線分の長さが最長の辺の長さと同じであるような多角形が存在することが容易に分かる．ジグザグに折り畳むことに限定しても，一筋縄ではいかないようである．より一般に「多角形の一直線上への折り畳みにおいて，折り畳み可能であるとき，折り畳まれて得られる線分が最短となる折り畳み方を調べる」という問題を研究するのは，前途多難であると言わざるを得ない．

まずは，ジグザグに折り畳むことに限定して，全ての辺を一直線上に折り畳むことができる多角形を特徴づけることから始めたい．内接円をもつ角数が多い多角形の一部の辺をジグザグに折り畳んで得られる多角形として特徴づけるのではないかと予想している．特に，辺長が自然数の場合は，議論を，ラマヌジャンも研究されていた整数の分割の理論と関連付けられるのではないかと期待している．

参考文献

[1] K. Böröczky, G. Kertész and E. Makai Jr., The minimum area of a simple polygon with given side lengths, Periodica Mathematica Hungarica, 39(1) (1999)33-49.

[2] R. Connelly, E. D. Demaine and G.Rote, Straightening polygonal arcs and convexifying polygonal cycles, Discrete Comput. Geom. **30** (2003) 205-239.

[3] E. D. Demaine and J. O'Rourke,Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra (2007)
(日本語訳：上原隆平(訳),幾何的な折りアルゴリズム －リンケージ・折り紙・多面体, 近代科学社 (2009)).

[4] D.Djukić, V.Janković, I.Matić and N.Petrović, The IMO Compendium : 1959-2009 2nd ed. (2011) Springer.

[5] S. Goto, K. Komatsu and J. Yagi, The configuration space of almost regular polygons, Hiroshima Mathematical Journal 50(2020)185-197.

[6] 飯島 康之, GC を活用した図形の指導, (1996), 明治図書.

[7] 飯島康之, 作図ツール Geometric Constructor を使った探究事例と教育実践について, 数理解析研究所講究録, 1674, (2010) 99-111.