

## Substitution rule による大きな平面的正 5 角形リングの構成

沖縄県立球陽高等学校 上地明德(1 年) 与儀奈央(2 年) 山内昌哲(数学クラブ顧問)

概要 : 長さ  $l$  の平面的正 5 角形リングとは, 2 次元ユークリッド空間において  $l$  個の合同な正 5 角形を辺でつなぎ合わせてできる  $S^1 \times [0, 1]$  に同相なものをいう. 任意の半径の円に対して, それを内側の領域に含む 5 回回転対称性(以下, 5 回対称性という)をもつ平面的正 5 角形リングで, ペンローズタイリングに含まれるものが存在することを述べる.

### 1. イントロダクション

長さ  $l$  の平面的正 5 角形リング  $R$  とは, 2 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^2$  において  $l$  個の合同な正 5 角形を辺でつなぎ合わせてできる  $S^1 \times [0, 1]$  に同相なものをいう. ここで  $S^1$  は単位円周,  $[0, 1]$  は単位閉区間を表す. いま,  $R$  は  $S^1 \times [0, 1]$  に同相であることから,  $R$  の境界は 2 つの円周状の連結成分, 内側の境界と外側の境界をもつ.  $R$  の内側の境界の円周状の連結成分で囲まれた領域を,  $R$  の内側の領域と呼ぶことにする([1], [2]). 任意の半径の円に対して, それを内側の領域に含む 5 回対称性をもつ  $R$  で, ペンローズタイリングに含まれるものが存在することを示す.

平面的正 5 角形リングが  $m$  回対称性をもつとは, リングを不変にするような角  $\frac{2\pi}{m}$  の回転変換が存在するときをいう([3], [7]).

ペンローズタイリングの正 5 角形の substitution rule は, 図 1 のように与えられる([5]). ここで  $\lambda > 1$ ,  $\lambda P$  は  $P$  の  $\lambda$  倍の拡大,  $\sigma(\lambda P)$  は  $\lambda P$  の substitution rule を表す.

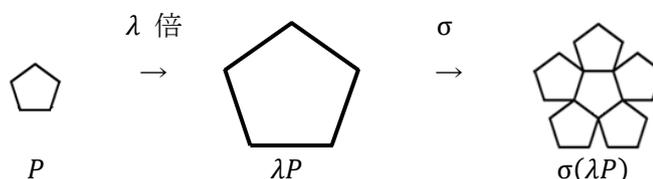


図 1 : 正 5 角形  $\lambda P$  の substitution rule

長さ  $l$  の平面的正 5 角形リング  $R$  のすべての正 5 角形に, 図 1 の substitution rule を適用するとは,  $\lambda$  を 1 より大きい定数,  $l$  を 1 以上の整数,  $P$  を正 5 角形とすると, 集合族  $R = \{P_k \subset$

$\mathbb{R}^2 \mid P_k : P$  と合同な正 5 角形,  $k = 1, 2, 3, \dots, l$  のすべての  $P_k (\in R)$  の  $\lambda$  倍の拡大  $\lambda P_k$  を, 図 1(右端)の図形に置き換える操作をいう. 平面的正 5 角形リング  $R$  のすべての正 5 角形  $P_k (k = 1, 2, 3, \dots, l)$  が  $\sigma(\lambda P_k)$  のとき,  $(\sigma(\lambda P_k) =) \sigma(R)$  と表す([1], [2], [3], [6], [7]).

平面的正 5 角形リング  $R$  に, 図 1 の substitution rule を 1 回適用した  $\sigma(R)$  のすべての正 5 角形が  $\mathbb{R}^2$  上にあることは, その定義( $R$  のすべての正 5 角形を  $\mathbb{R}^2$  上の図形に置き換える操作)から直接出る.

平面的正 5 角形リング  $R$  に, 図 1 の substitution rule を  $n$  回適用した  $\sigma^n(R)$  には, 複数の平面的正 5 角形リングが存在する.  $\sigma^n(R)$  に含まれる正 5 角形の選び方により,  $\sigma^n(R)$  から 5 回対称性をもつ平面的正 5 角形リングが得られる. これを, 後で述べる定理(2)で示す.

図 1 の  $\sigma(\lambda P)$  は, ペンローズタイリングに現れる 6 種類のパッチの 1 つである([5]). よって, ペンローズタイリングに含まれる平面的正 5 角形リングに, 図 1 の substitution rule を適用して得られる正 5 角形の配置は, ペンローズタイリングの一部となる. このことから, 図 1 の substitution rule は, ペンローズタイリングの substitution rule と両立する. それ故に, ペンローズタイリングに含まれる平面的正 5 角形リングを出発点として, 図 1 の substitution rule を適用して得られる平面的正 5 角形リングは, 再びペンローズタイリングに含まれることが言える.

ペンローズタイリングとは, 図 2 の 4 種類のタイルによる 2 次元ユークリッド空間のタイリング(図 3)である([1], [2], [7]). ペンローズタイリングは, タイリングを不変にするような角  $\frac{2\pi}{5}$  の回転変換が存在する 5 回対称性をもつタイリングとして知られている([4], [7]). 図 3 のペンローズタイリングに, 図 4 の平面的正 5 角形リングが見られる. 図 4(左上)の平面的正 5 角形リングを  $R_1$ , その頂点を, 図 5 のようにそれぞれ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J とおく.  $R_1$  において, 5 つの直線 AF, CH, EJ, GB, ID は 1 点で交わり, それを点 O とおく. この点 O を,  $R_1$  の中心と呼ぶことにする.  $\angle AOC = \angle COE = \angle EOG = \angle GOI = \angle IOA = \frac{2\pi}{5}$  より, 端点を点 O とする図 5 の半直線 OA, OC, OE, OG, OI は,  $R_1$  には,  $R_1$  を不変にするような角  $\frac{2\pi}{5}$  の回転変換が存在することを示している. したがって,  $R_1$  は, 5 回対称性をもつ平面的正 5 角形リングであることが分かる([1], [2], [3], [7]).



図 2 : ペンローズの 4 種類のタイル

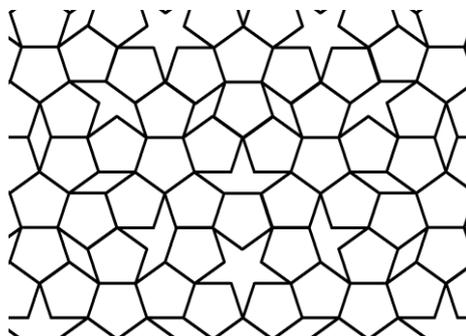


図 3 : ペンローズタイリング

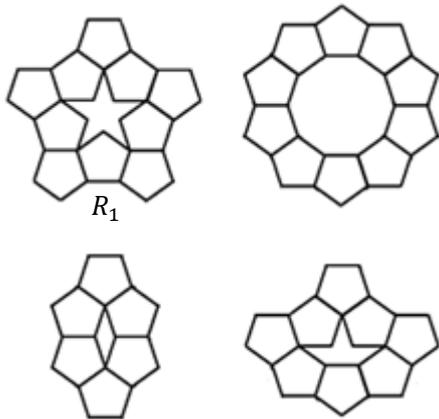


図 4 : ペンローズタイリングの平面的正 5 角形リング

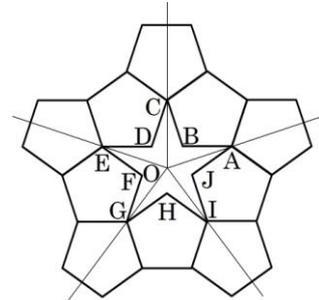


図 5 : 5 回対称性をもつ  $R_1$

私たちは、テキスト[7]と書籍[8]の第 2 編第 3 章第 1 節 1 を用いてペンローズタイリングについて学び、論文[2]の研究をし、図 4 の 5 回対称性をもつ平面的正 5 角形リング  $R_1$  を用いて、次の結果を得た。

- 定理 (1) いくらでも長い平面的正 5 角形リングが存在する。
- (2) 任意の半径の円に対して、それを内側の領域に含む平面的正 5 角形リングが存在する。
- (3) (1), (2)を満たす 5 回回転対称性をもつ平面的正 5 角形リングで、ペンローズタイリングに含まれるものが存在する。

謝辞 この研究を行うにあたり、テキスト[7]をご提供いただいた高知大学工学部小松和志教授に心より謝意を述べたい。

## 2. 定理の証明

図 4 または図 5 の平面的正 5 角形リング  $R_1$  を用いて証明する。  $R_1$  の 1 辺の長さを 1, 図 1 の  $\sigma(\lambda P)$  は図 1 の  $P$  と合同な 6 個の正 5 角形から成るもの、  $R_1$  の中心  $O$  を原点に固定、これらを仮定する。

(定理(1)の証明) いくらでも長い平面的正 5 角形リングが存在することを証明する。

まず、図 4 の平面的正 5 角形リング  $R_1$  に、図 1 の substitution rule を  $n$  回適用した  $\sigma^n(R_1)$  には、平面的正 5 角形リングが存在することを示す。次に、この平面的正 5 角形リングの長さを  $n$  の式で表し、  $n \rightarrow \infty$  とき、その式が無限大になることを示せばよい。

では、まず、  $\lambda$  の値を求める。図 1 の  $\sigma(\lambda P)$  の頂点を、図 6 のようにそれぞれ  $K, L, M, N, Q$  とおく。図 1(中央)の正 5 角形  $\lambda P$  を図 1(右端)の図形と置き換えるための十分条件は、  $\lambda P$  の 1 辺の長さが図 6 の線分  $KQ$  と等しいことである。すなわち  $\lambda = KQ$  である。  $ML = MN (=1$ (仮定より)) の二等辺三角形  $MLN$  において、  $\angle LMN = \frac{\pi}{5}$  より、余弦定理を適用して、2 次方程式  $LN^2 =$

$1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos \frac{\pi}{5}$  を得る。これを解くと、  $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$  より、  $LN = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  となる。仮定より、

$KL = NQ = 1$  であるから,  $\lambda = KQ = KL + LN + NQ = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  となる. よって, 図 1 の  $P$  を  $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$  ( $= \lambda > 1$ ) 倍に拡大した  $\lambda P$  を, 図 7 のように,  $\sigma(\lambda P)$  の凹んだ部分の線分(V 字の形)を除いた外形とずれを生じず重ね合わせることができる. それ故,  $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  のとき,  $R_1$  を  $\lambda$  倍に拡大した  $\lambda R_1$  の各正 5 角形  $\lambda P_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, 10$ ) を, 図 8 のように, 図 1(右端)の図形とそれぞれずれを生じず重ね合わせることができる.

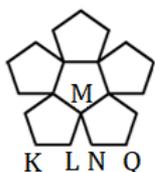


図 6 :  $\sigma(\lambda P)$

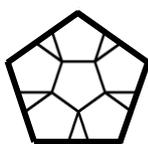


図 7 :  $\lambda P \cup \sigma(\lambda P)$

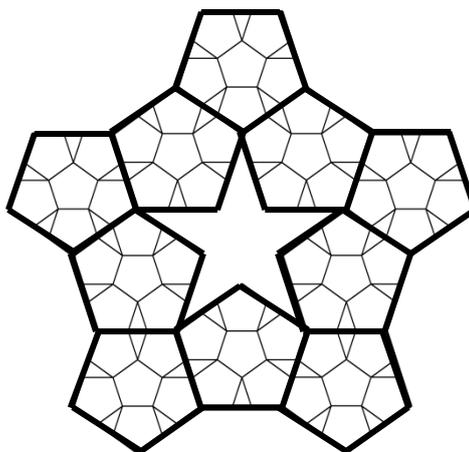


図 8 :  $\lambda R_1 \cup \sigma(R_1)$

よって,  $R_1$  に, 図 1 の substitution rule を 1 回適用することができる.  $\sigma(R_1)$  に含まれる正 5 角形の取り方により,  $\sigma(R_1)$  には複数の平面的正 5 角形リングが存在する. ここでは,  $\sigma(R_1)$  の各  $\sigma(\lambda P_k)$  から, 図 9 の中央の灰色の部分の正 5 角形を選び, 5 個の白色の正 5 角形から 2 個選んで合計 3 個の正 5 角形をそれぞれ選ぶことにする.  $\sigma(R_1)$  は 10 個の  $\sigma(\lambda P_k)$  から構成されていることから,  $\sigma(R_1)$  の各  $\sigma(\lambda P_k)$  から選ぶ正 5 角形の個数の合計は  $10 \cdot 3 = 30$  である. よって, 図 10 の灰色の部分の長さ 30 の平面的正 5 角形リングが得られる. 更にこの長さ 30 の平面的正 5 角形リングに, 図 1 の substitution rule を 1 回適用する. そうすると, 同様にして, 長さ  $30 \cdot 3 = 90$  の平面的正 5 角形リングが得られる. この長さ 90 の平面的正 5 角形リングは,  $R_1$  のすべての正 5 角形に, 図 1 の substitution rule を 2 回適用した  $\sigma^2(R_1)$  にも含まれる. それ故に, 一般に,  $R_1$  のすべての正 5 角形に, 図 1 の substitution rule を  $n$  回適用した  $\sigma^n(R_1)$  から長さ  $(30 \cdot 3^{n-1}) = 10 \cdot 3^n$  の平面的正 5 角形リングが得られる.  $n \rightarrow \infty$  とき, その長さが  $10 \cdot 3^n \rightarrow \infty$  となる. よって, 長さ  $10 \cdot 3^n$  の平面的正 5 角形リングは, いくらでも長い平面的正 5 角形リングとなる. したがって, いくらでも長い平面的正 5 角形リングが存在することが示せた.

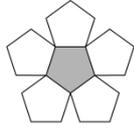


図 9 :  $\sigma(\lambda P_k)$

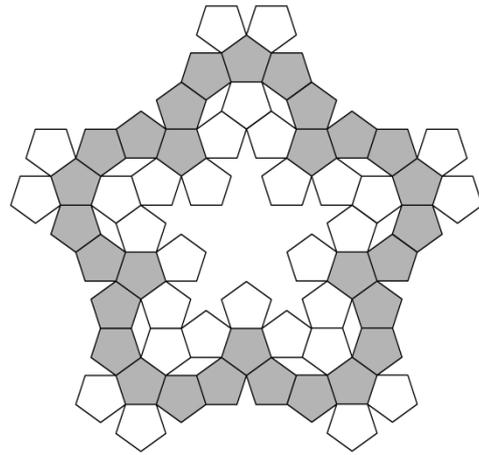


図 10 : 長さ 30 の平面的正 5 角形リング(灰色の部分)

(定理(2)の証明) 準備として, 図 5 の  $R_1$  の内側の領域(頂点 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J で囲まれた星型の内部とその境界線)に含まれる円の半径を求める.  $R_1$  の頂点 B, D, F, H, J を通る中心が点 O の円を  $C_0$ ,  $R_1$  の内側の領域を  $D_0$  とおく. ここでは,  $C_0 \subseteq D_0$  を満たす円  $C_0$  の半径  $r$ (とおく) を求める.

まず, 図 5 の  $AB = AJ$  の二等辺三角形  $ABJ$  は,  $AB = AJ = 1$ (仮定より),  $\angle BAJ = \frac{\pi}{5}$  より, 図 6 の二等辺三角形  $MLN$  と合同である. よって, 図 5 の二等辺三角形  $ABJ$  の辺  $BJ$  と図 6 の二等辺三角形  $MLN$  の辺  $LN$  は等しいから,  $BJ = LN = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ( $= \phi$  とおく) である. 次に, 図 5 の  $OB = OJ$  の二等辺三角形  $OJB$  において,  $OB = OJ = r$ (辺  $OB$ ,  $OJ$  は円  $C_0$  の半径より),  $BJ = \phi$ ,  $\angle BOJ = \frac{2\pi}{5}$  より, 余弦定理を適用して, 2 次方程式  $\phi^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cos \frac{2\pi}{5}$  を得る. これを解くと,  $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\phi}{2}$  より,  $r^2 = \frac{\phi^2}{2-\phi}$ , 更に  $r > 0$ ,  $0 < \phi < 1$  より,  $r = \sqrt{\frac{\phi^2}{2-\phi}} = \phi \sqrt{\frac{1}{2-\phi}}$  となる. したがっ

て, 円  $C_0$  の半径  $r$  は  $\phi \sqrt{\frac{1}{2-\phi}}$  である. 仮定より, 図 5 の  $R_1$  の中心 O は原点に固定されているので, 円  $C_0$  と  $R_1$  の配置は図 11 のようになる. 故に,  $C_0 \subseteq D_0$  を満たす円  $C_0$  の半径  $r$  を求めることができた.

それでは, 任意の半径の円に対して, それを内側の領域に含む平面的正 5 角形リングが存在することを証明しよう.

まず, 1 以上の任意の整数  $n$  に対して, 長さ  $10 \cdot 3^n$  の平面的正 5 角形リングの内側の領域を  $D_n$ , 円  $C_0$  の半径  $r$  に,  $\lambda$  の  $n$  乗を掛けた  $\lambda^n r$  を半径, 原点を中心とする円を  $C_n$  と表し,  $C_n \subset D_n$  が成り立つことを示す.

では, まず,  $n = 1$  の場合, 定理(1)より,  $\sigma(R_1)$  には, 長さ 30 の平面的正 5 角形リング(図 10 の灰色の部分)が存在する.  $\sigma(R_1)$  は,  $R_1$  を  $\lambda$  倍に拡大して得られることから, 図 11 の円  $C_0$  の半径  $r$  を  $\lambda$  倍に拡大した  $\lambda r$  を半径とする円  $C_1$  は, 長さ 30 の平面的正 5 角形リングの内側の

領域  $D_1$  に含まれる. よって, 長さ  $30$  の平面的正  $5$  角形リングと円  $C_1$  の配置は, 図  $12$  のようになる. したがって, 円  $C_1$  は,  $\sigma(R_1)$  に含まれる長さ  $30$  の平面的正  $5$  角形リング (灰色の部分) の内側の領域  $D_1$  に含まれる. すなわち  $C_1 \subset D_1$  が成り立つ. 以下, この操作を  $n$  回繰り返すことにより, 各  $n$  に対して, 帰納的に, 長さ  $10 \cdot 3^n$  の平面的正  $5$  角形リングの内側の領域に含む原点  $O$  を中心とする半径  $\lambda^n r$  の円を得る. すなわち  $C_n \subset D_n$  が成り立つ円  $C_n$  が存在する. 一方,  $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$  かつ  $r = \phi \sqrt{\frac{1}{2-\phi}} > 0$  より, 円の半径は  $\lambda^n r \rightarrow \infty$  となる. したがって, 任意の半径の円に対して, それを内側の領域に含む平面的正  $5$  角形リングが存在することが示せた.

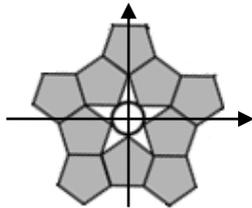


図 11 :  $C_0 \subseteq D_0$

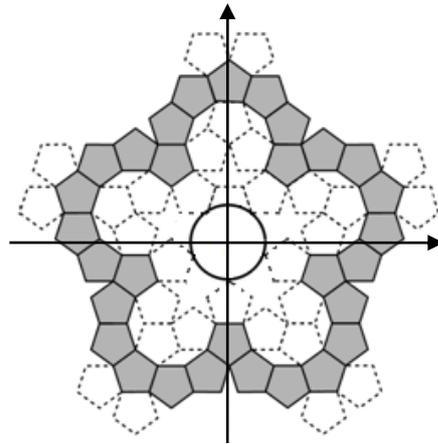


図 12 :  $C_1 \subset D_1$

(定理(3)の証明) 定理(1), (2)を満たす  $5$  回対称性をもつ長さ  $10 \cdot 3^n$  の平面的正  $5$  角形リングは, ペンローズタイリングに含まれることを証明する.

まず, 長さ  $10 \cdot 3^n$  の平面的正  $5$  角形リングには, リングを不変にするような角  $\frac{2\pi}{5}$  の回転変換が存在することを証明する. これは, リングを不変にするような角  $\frac{2\pi}{5}$  の回転変換が存在するように,  $\sigma^n(R_1)$  に含まれる正  $5$  角形を選ぶことにより示される. その次に,  $\sigma^n(R_1)$  がペンローズタイリングに含まれることを示す. そうすれば, 長さ  $10 \cdot 3^n$  の平面的正  $5$  角形リングは  $\sigma^n(R_1)$  に含まれることにより, それがペンローズタイリングに含まれることが示される.

では, まず,  $n = 1$  の場合, 図  $5$  の端点  $O$  の半直線  $OA$ ,  $OC$  で囲まれた領域で小さい方の領域を  $\Delta_1\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ , 半直線  $OC$  と  $OE$ ,  $OE$  と  $OG$ ,  $OG$  と  $OI$ ,  $OI$  と  $OA$  についても同様に, それぞれ

$\Delta_2\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ,  $\Delta_3\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ,  $\Delta_4\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ,  $\Delta_5\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  と表す. 領域  $\Delta_1\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  に含まれる  $R_1$  の一部を灰色で色付け

し,  $R_1$  の中心  $O$  を原点に固定した図が図  $13$  である. 図  $13$  の  $R_1$  の灰色の部分は, 直線  $OB$  に関して対称である. この図  $13$  の  $R_1$  に, 図  $1$  の substitution rule を  $1$  回適用する. そうすると,

点  $A$ ,  $B$ ,  $C$  はそれぞれ  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$  を  $\lambda\left(=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$  倍に拡大した  $\lambda\overrightarrow{OA}$ ,  $\lambda\overrightarrow{OB}$ ,  $\lambda\overrightarrow{OC}$  の終点  $A_1$ ,

$B_1, C_1$ (とおく)に移動する. よって, 図 14(左)の  $\sigma(R_1)$  が得られる. 図 13 の  $R_1$  の灰色の部分は, 直線  $OB$  に関して対称であることから, それに図 1 の substitution rule を適用して得られた図 14(左)の  $\sigma(R_1)$  の  $\Delta_1\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  に含まれる部分の図形は, 直線  $OB_1$  に関して対称であると言える. それ故,  $\sigma(R_1)$  の  $\Delta_1\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  に含まれる正 5 角形から図 14(左)のように, 直線  $OB_1$  に関して対称となる平面的正 5 角形リングの一部(灰色の部分)を選ぶことができる. この灰色の部分, 原点  $O$  を中心に反時計回りに  $\frac{2\pi}{5}$  だけ回転させる. そうすると, 灰色の部分は, 領域  $\Delta_2\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  の  $\sigma(R_1)$  の一部(太線の部分)に重ね合わせることができる. 同様にして, この灰色の部分, 原点  $O$  を中心に反時計回りに  $\frac{2\pi}{5}$  ずつ次々と回転させて, 各領域  $\Delta_3\left(\frac{2\pi}{5}\right), \Delta_4\left(\frac{2\pi}{5}\right), \Delta_5\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  における平面的正 5 角形リングの一部分の図形を決めてゆく. そうすると, 図 14(右)の 5 回対称性をもつ長さ 30 の平面的正 5 角形リングが得られる. 故に,  $\sigma(R_1)$  から 5 回対称性をもつ長さ 30 の平面的正 5 角形リングが得られる. 以下, この操作を  $n$  回同様にして繰り返すことにより, 帰納的に,  $\sigma^n(R_1)$  から 5 回対称性をもつ長さ  $10 \cdot 3^n$  の平面的正 5 角形リングが得られる.

次に,  $\sigma^n(R_1)$  は, ペンローズタイリングの平面的正 5 角形リング  $R_1$  に, ペンローズタイリングの substitution rule と両立する図 1 の substitution rule を  $n$  回適用して得られる. よって,  $\sigma^n(R_1)$  は, ペンローズタイリングの一部となる. 長さ  $10 \cdot 3^n$  の平面的正 5 角形リングは,  $\sigma^n(R_1)$  に含まれる. それ故に, 長さ  $10 \cdot 3^n$  の平面的正 5 角形リングも, ペンローズタイリングに含まれることが言える.  $n \rightarrow \infty$  のとき, 定理(1), (2)より, 長さ  $10 \cdot 3^n$  の平面的正 5 角形リングは, いくらでも長い平面的正 5 角形リングかつ任意の半径の円に対して, それを内側の領域に含む平面的正 5 角形リングである.

以上, 定理(1), (2)を満たす平面的正 5 角形リングは, 5 回対称性をもつ平面的正 5 角形リングで, ペンローズタイリングに含まれることが示せた.

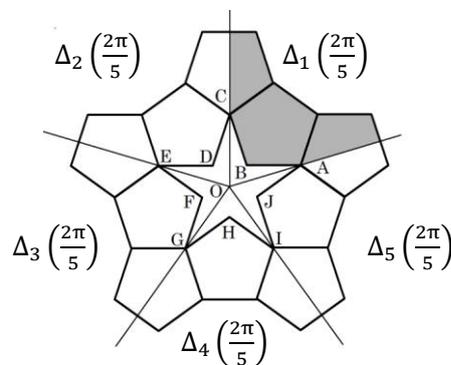


図 13 : 5 回対称性をもつ  $R_1$

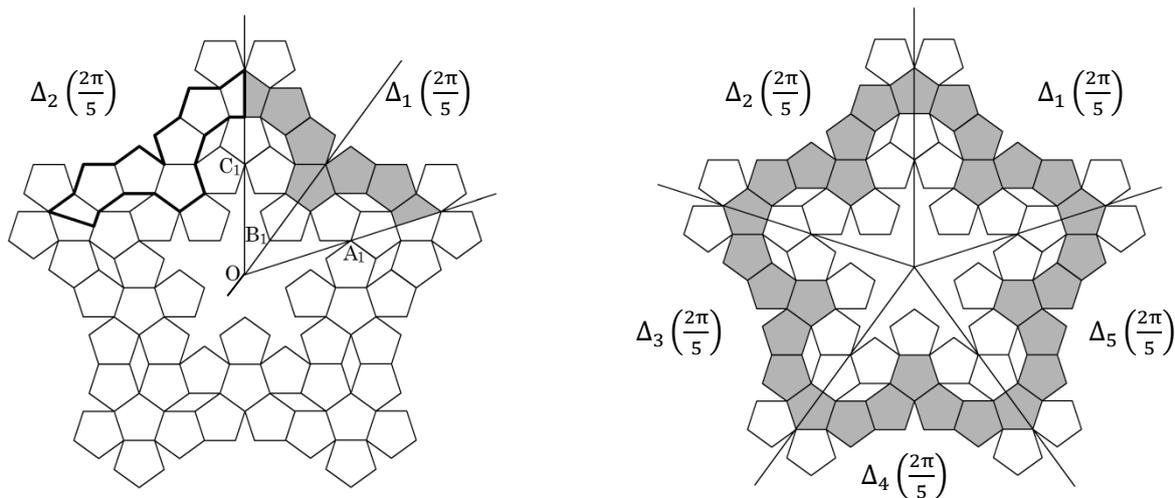


図 14 :  $\sigma(R_1)$  に含まれる 5 回対称性をもつ平面的正 5 角形リング

(証明終)

平面的正 5 角形リング  $R_1$  の  $\lambda^n$  倍の拡大  $\lambda^n R_1$  の内側の領域を  $E_n$  と表すと、定理(2)より、1 以上の任意の整数  $n$  において次の系が成り立つ。

$$\text{系 } C_n \subseteq E_n \subset D_n.$$

#### 参考文献

- [1] H. Ei, H. Hayashi, and K. Komatsu, On folding of planar regular pentagon rings, *Nihonkai Math. J.*, 31(2020)45-58.
- [2] H. Ei, H. Hayashi, and K. Komatsu, 正 5 角形リングパズル(Regular pentagon ring puzzle), *Scientific and Educational Reports of the Faculty of Science and Technology, Kochi University* Vol.1(2018), No.6.
- [3] K. Kato, K. Komatsu, F. Nakano, K. Nomakuchi, and M. Yamauchi, Remarks on 2-dimensional quasiperiodic tilings with rotational symmetries, *Hiroshima Math. J.*, 38 (2008), 385-395.
- [4] R. Penrose, The rôle of aesthetics in pure and applied mathematical research. *Bull. Inst. Math. Appl.* 10, (1974), 266-71.
- [5] G. Branko and G. C. Shephard, *Tilings and patterns*. New York, W. H. Freeman and Co (1986).
- [6] S. Lorenzo, *Topology of Tiling Spaces*. Univ. Lecture, Vol. 46 (2008).
- [7] 小松和志「つくる幾何学」高知大学 体験する数学, 数学課題探究講義テキスト.
- [8] 手塚育志, 小島定吉 他, 「トポロジーデザイン—新しい幾何学からはじめる物質・材料設計」, エヌ・ティー・エス出版(2009).