

# 船型人力遊具「ライジング号」のパラメトリック励振 Parametric Excitation in Man-Powered Pirate Ship Ride “Rising-Go”

赤神青空, 岡田佳助, 田島裕之

S. Akagami, K. Okada, and H. Tajima  
〒 780-8520 高知市曙町 2-5-1 高知大学理工学部  
Department of Mathematics and Physics,  
Kochi University, Kochi 780-8520, Japan

(Dated: February 18, 2021)

高知県香南市にある創造広場「アクトランド」における船型人力遊具「ライジング号」の周期的運動の考察を行った。ライジング号の船内の人の変位変化が1,900kgの船体の振動にどのような影響を与えるかという点に着目し、運動方程式を解析的及び数値的に解くことでその挙動を調べた。人が船内を動くことで重心位置が周期的に変化する場合、ブランコなどの例で知られているようにパラメトリック励振により船体振動の振幅が増幅することが期待される。固有角振動数の2倍の角振動数で慣性モーメントなどの物理パラメータを周期的に変化させることで振動振幅の増幅が起こる通常のパラメトリック励振とは異なり、本研究で考案したライジング号のモデルでは固有角振動数と同じ角振動数で船上の人の変位を変化させることで振幅が増幅することを明らかにした。また、抵抗がある場合において人が動かない場合に比べて船体振動の減衰が緩やかになることがわかった。

PACS numbers: 01.40.-d, 45.20.D-

## I. イントロダクション

高知県香南市にある創造広場「アクトランド」には、人力だけで動く遊具が数多く設置されており、来場者はそれらを無料で利用することができる [1]。その中でも一際目立つ全長7メートル以上に及ぶライジング号 (図1参照) という海賊船型の遊具は国内でも希少である。ライジング号は遊園地などにある「バイキング」と呼ばれる名称の遊具の人力版に相当する [2]。バイキングは取り付けられたモーターを動力として海賊船を模した船体が大きく揺れるアトラクションである。ライジング号にはモーターのような動力源がない代わりに船の傾きを調整するハンドルが設置されている。ハンドルを回すことで人が乗り込んだ船を傾けた後、ストッパーを外し揺れるライジング号を楽しむといったものである。また、通常の電動のバイキングには安全のためのシートベルトが設置されているのが普通だが、ライジング号にはそうしたものはなく船内を自由に動くことができるようになっているという特徴がある。

人が周期的に振動中の船内を移動したとすると重心位置も周期的に変化する。このような運動はブランコなどの振動系に通じるものがある。ブランコの場合は身体を伸ばしたり縮めることで支点から重心までの位置を周期変化させることによって振幅を増幅させている。運動方程式中では、回転軸まわりの慣性モーメントが周期変化することになり、特定の条件下では不安定振動が発生する。このような現象はパラメトリック励振と呼ばれ、大学教育における力学の重要な概念の一つであるとともに、自動制御などの分野において精力的に研究されている [3-8]。パラメトリック励振を引き起こす条件は安定性解析から得ることができ、ブランコの場合は固有角振動数の2倍の角振動数で重心位置を変化させることで振動振幅が増幅されることが知られている [9]。

本研究では、ライジング号の振動運動に関する簡易的なモデルを考案し、ライジング号に乗っている人が周期的に船内を移動した場合に船体の振動がどのように変化するかを調べる。人が静止して乗っている場合の固有角振動数を求めた後、ブランコにおけるパラメトリック励振の例とラ



図1: 高知県香南市の創造広場「アクトランド」にあるライジング号の全体写真。

イジング号の場合と比較することで、ライジング号がパラメトリック励振を起こすための人の運動周期について議論する。算出された人の変位の時間的変化の式を用いて抵抗がある場合のライジング号の運動方程式を4次のルンゲ=クッタ法を用いて数値的に解析し、人が船内中心で静止している場合との比較を行う。また、この解析の結果を元に行ったライジング号の実地検証について報告する。以下では、重力加速度は  $g = 9.8\text{m/s}^2$  とする。

## II. モデル

図2に示すように、ライジング号のモデルとして人が船内を移動することで重心が時間的に変化するような振り子を考える。マストの高さを  $d$ 、船体中心 (マスト) からの変位を  $x(t)$ 、回転中心 (マスト上端) から地面に垂直に下ろした垂線とマストのなす角 (振れ角) を  $\theta(t)$  とする。創造広場アクトランドからの情報提供によりライジング号の船体重量  $M$  は1900kg、マストの高さ  $d$  は6.3mであることがわかっている。また、船内を移動する人の体重  $m$  は

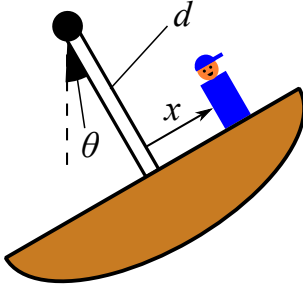


図 2: ライジング号の振動に関する力学的モデル。

典型的な値として 60kg に設定した。

### III. ライジング号の固有角振動数の導出

まず、人の変位を  $x(t) = 0$  とし、ライジング号の固有角振動数  $\omega_0$  を求める。回転の運動方程式は、角運動量  $L(t)$  とモーメント  $N(t)$  を用いて、以下のように表すことができる。

$$\frac{dL(t)}{dt} = N(t). \quad (3.1)$$

角運動量  $L(t)$  は、慣性モーメント  $I$  と振れ角  $\theta(t)$  の時間微分  $d\theta(t)/dt$  を用いることで次のように表すことができる。

$$L(t) = I \frac{d\theta(t)}{dt}. \quad (3.2)$$

また、 $N(t)$  は、

$$N(t) = -(M + m)gd \sin \theta(t), \quad (3.3)$$

で与えられる。以上より、運動方程式は、

$$I \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + (M + m)gd \sin \theta(t) = 0, \quad (3.4)$$

となる。 $I = (M + m)d^2$  を用いると、この運動方程式で表される周期運動の周期  $T_0$  は、

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{d}{g}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \sin^{2n} \frac{\theta_0}{2} \right\} \quad (3.5)$$

と表すことができる [9]。ここで、 $\theta_0$  は  $t = 0$  における振れ角を表す。記号 !! は二重階乗を表しており、例えば  $n!!$  は、与えられた自然数  $n$  に対し、1 から  $n$  までの  $n$  と同じ偶奇性を持つ数だけを全て掛けた積を意味し、 $n = 0$  のときは、 $0!! = 1$  と定義される。また、 $|\theta_0| \ll 1$  とすると (3.5) 式の  $\{ \}$  の中身は 1 に近似でき、 $T \simeq 2\pi \sqrt{d/g}$  となり、振り子の等時性に帰着する。固有角振動数  $\omega_0$  は  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  より

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{d}{g}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \sin^{2n} \frac{\theta_0}{2} \right\}} \quad (3.6)$$

のように得られる。

### IV. ライジング号中の人の変位 $x(t)$ に関する考察

$x(t)$  が周期的に変化する場合のライジング号の運動を考える。簡単のため、ここでは抵抗係数を無視する。慣性モーメント  $I(t)$  は  $x(t)$  によって以下のように時間変調する。

$$I(t) = Md^2 + m[d^2 + x(t)^2]. \quad (4.1)$$

また、 $N(t)$  は次のように表すことができる。

$$N(t) = -(M + m)g\sqrt{d^2 + x_G(t)^2} \times \sin \left[ \theta(t) + \sin^{-1} \left( \frac{x_G(t)}{\sqrt{d^2 + x_G(t)^2}} \right) \right]. \quad (4.2)$$

ここで、 $x_G(t)$  は船体中心からの系全体の重心変位を表し、

$$x_G(t) = \frac{m}{M + m}x(t) \quad (4.3)$$

と定義される。以上より、運動方程式は以下ようになる。

$$I(t) \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{dI(t)}{dt} \frac{d\theta(t)}{dt} + (M + m)g\sqrt{d^2 + x_G(t)^2} \times \sin \left[ \theta(t) + \sin^{-1} \left( \frac{x_G(t)}{\sqrt{d^2 + x_G(t)^2}} \right) \right] = 0. \quad (4.4)$$

次に、パラメトリック励振が現れるものとしてよく知られるブランコの例と比較することで、ライジング号にパラメトリック励振が生じるための人の変位  $x(t)$  について考察する。ブランコの簡単なモデルとして、ひもの長さ  $l(t)$  が時間的に変化している振り子を考えることができる。 $l(t)$  は基準のひもの長さ  $l_0$  の近傍で周期的に伸び縮みするものとして、

$$l(t) = l_0[1 - h \cos(2\omega_s t)], \quad (4.5)$$

と仮定する ( $h$  は定数)。ここで、ブランコのひもの伸縮の角振動数は、パラメトリック励振が生じる条件である、固有角振動数  $\omega_s$  の 2 倍の値とした [9]。この時、ブランコの支点周りの慣性モーメント  $I_s(t)$  は

$$I_s(t) = ml_0^2[1 - h \cos(2\omega_s t)]^2, \quad (4.6)$$

と表すことができる。

一方、ライジング号における人の変位を次のように仮定する。

$$x(t) = a \sin \phi(t). \quad (4.7)$$

ここで、 $a$  は振幅を表す。(4.1) 式に (4.7) 式を代入し、整理するとライジング号の慣性モーメントは

$$I(t) = \alpha[1 - 2\beta \cos 2\phi(t)], \quad (4.8)$$

と表せる。ここで、 $\alpha$  と  $\beta$  は

$$\alpha = \frac{1}{2}[2(M + m)d^2 + ma^2], \quad (4.9)$$

$$\beta = \frac{ma^2}{4(M + m)d^2 + 2ma^2}. \quad (4.10)$$

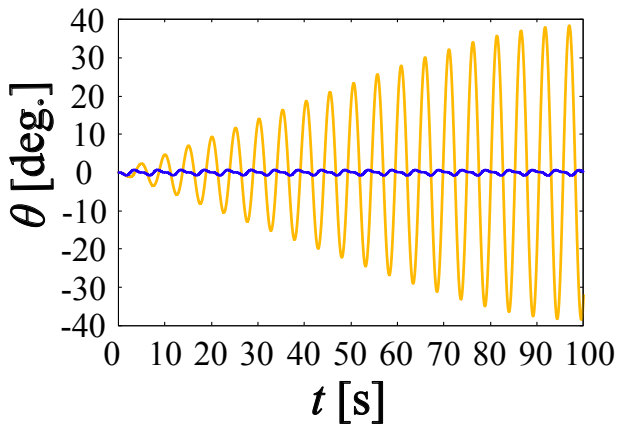


図 3: 抵抗がない場合の  $\theta(t)$  の時間依存性。黄色の曲線は人の変位の時間変化を  $x(t) = a \sin \omega_0 t$ 、青色の曲線は人の変位の時間変化を  $x(t) = a \sin 2\omega_0 t$  としたときの数値計算結果。

$m \ll M$  とすると、 $\beta \ll 1$  とみなせるので、(4.8) 式は次のように近似することができる。

$$I(t) \approx \alpha[1 - \beta \cos 2\phi(t)]^2. \quad (4.11)$$

(4.6) 式と (4.11) 式を比較すると、 $\phi(t) = \omega_0 t$  としたときにパラメトリック励振が生じることが期待される。このとき、人の変位  $x(t)$  はライジング号の固有角振動数  $\omega_0$  を用いて、

$$x(t) = a \sin \omega_0 t, \quad (4.12)$$

となる。これは固有角振動数の2倍でパラメータを振動させることでパラメトリック励振が生じるブランコ等の例とは異なっていることがわかる。これは、(4.1) 式で表される慣性モーメントが  $x(t)$  の自乗に依存することに起因する。実際、 $t = 0$  おける角度  $\theta_0$  を  $|\theta_0| \ll 1$  とし、 $x(t) = a \sin \omega_0 t$  と  $x(t) = a \sin 2\omega_0 t$  の場合について4次のルンゲ=クッタ法を用いて(4.4)式の運動方程式を数値的に解析すると図3で表される結果を得ることができる。ここでは、 $a = 3.0\text{m}$  とし計算した。黄色の曲線が  $x(t) = a \sin \omega_0 t$  としたときの結果、青色の曲線が  $x(t) = a \sin 2\omega_0 t$  としたときの結果を示している。図3からはっきりとわかるように、角振動数を  $\omega_0$  にしたときにパラメトリック励振が起き、 $2\omega_0$  のときには起きないことがわかる。

上記のパラメトリック励振に加え、 $N(t)$  は  $x(t)$  によって変化していることからある種の強制振動の効果も同時に働いていることが期待される。実際に、 $|\theta(t)| \ll 1$ 、 $|x_G(t)| \ll 1$  としたとき(4.2)式は、

$$N(t) \approx -(M+m)gd\theta(t) - (M+m)ga \sin \omega_0 t, \quad (4.13)$$

近似できる。さらに、簡単のため  $I(t)$  の時間依存性を無視すると運動方程式(4.4)は、

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{d}\theta(t) \approx -\frac{ga}{d^2} \sin \omega_0 t, \quad (4.14)$$

のように  $\omega_0$  で振動する外力がある場合の調和振動子の運動方程式に帰着する [9]。

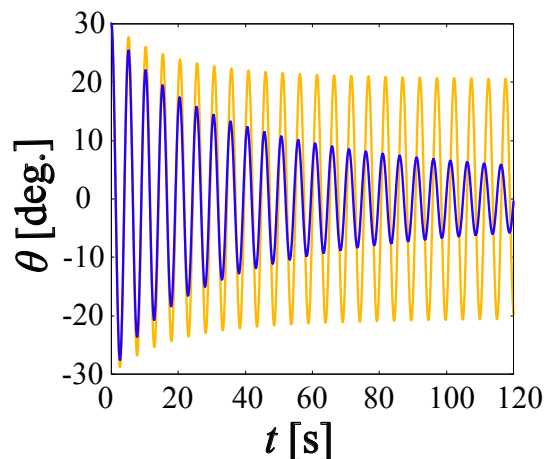


図 4: 抵抗がある場合の  $\theta(t)$  の時間依存性。青色の曲線は人の変位の時間変化を  $x(t) = 0$ 、黄色の曲線は人の変位の時間変化を  $x(t) = a \sin \omega_0 t$  としたときの数値計算結果。

## V. 解析と検証

(4.4) 式では抵抗がないという理想的な状況を考えてが、実際のライジング号を想定して抵抗の寄与を考える。ライジング号のレイノルズ数  $Re$  は代表長さ  $L$  と代表速度  $U$ 、動粘性率  $\nu$  を用いて  $Re = LU/\nu$  と表される [10]。また、動粘性率  $\nu$  は、粘性率  $\mu$  と密度  $\rho$  を用いて、 $\nu = \mu/\rho$  と表すことができる。気温  $20^\circ\text{C}$ 、気圧  $100\text{kPa}$  における空気粘性率と密度は理科年表 [11] によると  $\rho = 1.201\text{kg/m}^3$ 、 $\mu = 18.2 \times 10^{-6}\text{Pa}\cdot\text{s}$  である。ここで、代表長さ  $L$  をマストの長さ  $d$  とし、代表速度  $U$  をマストの長さ  $d$  と重力加速度  $g$  を用いて、 $U = d\sqrt{g/d}$  と表すことができるとすると、ライジング号のレイノルズ数は  $Re \approx 3 \times 10^6$  とおおよそ見積もることができる。この値より粘性抵抗に比べて慣性抵抗の方が優勢であると判断できるため、空気抵抗は速度の自乗に比例するとして抵抗の寄与を次のように付け加える。

$$I(t) \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{dI(t)}{dt} \frac{d\theta(t)}{dt} + (M+m)g\sqrt{L^2 + x_G(t)^2} \times \sin \left[ \theta(t) + \sin^{-1} \left( \frac{x_G(t)}{\sqrt{L^2 + x_G(t)^2}} \right) \right] - \gamma \left| \frac{d\theta(t)}{dt} \right| \frac{d\theta(t)}{dt} = 0. \quad (5.1)$$

ここで、第4項は抵抗項を表しており、 $\gamma$  は抵抗係数であり、本研究では  $\gamma = 10^4\text{kg}\cdot\text{m}^2$  とした。 $t = 0$  における振れ角  $\theta_0$  を  $\pi/6$  とし、(5.1) 式を4次のルンゲ=クッタ法を用いて数値的に解析すると図4のような結果が得られた。青色の曲線は人の変位の時間変化を  $x(t) = 0$  としたとき、すなわち、人が動かないときの結果であり、黄色の曲線は  $x(t) = a \sin \omega_0 t$  としたときの結果である。人が動かない場合は、抵抗項により減衰しているのに対し、人の変位が周期的に変化している場合は増幅こそ見られないも



図 5: ライジング号のハンドル。人力でハンドルを回すことによってライジング号の初期の振れ角を調整することができる。



図 6: ライジング号における検証の様子。

の  $x(t) = 0$  の場合に比べて減衰が緩やかであることがわかる。

上記の計算結果を元に、我々は実際に創造広場アクトランドに赴き検証実験を行った。初期の振れ角は図 5 ようにハンドルを回すことによって人力で調整することができる。初期角度をおよそ  $\pi/6$  とした上で船内を人が移動する場合としない場合とで振幅の減衰具合の比較を行った。図 6 は検証の様子である。しかしながら、検証の結果、2つのケースの間の有意な差を観測することができなかった。この要因としては、風などの影響に加え、ハンドル近傍に設置されているストッパーを解除する際に踏み込みの具合によって各試行ごとにランダムに船体にブレーキがかかっていたこと、船内の人が必ずしも固有角振動数で動くことができないことが考えられる。定量的な評価を行うには、天候条件の良い日を選び、また、ブレーキによるノイズの存在下でも有意な差がみられるような試行回数をこなすこ

とでデータの統計数を増加させる必要がある。また、固有角振動数で船内を動くには、実験日当日の体調管理に加えペースメーカーも検討する余地がある。こうした要因は今後の課題である。

## VI. まとめ

本研究では、高知県香南市の創造広場「アクトランド」に設置されている船型人力遊具「ライジング号」の振動運動について考察した。パラメトリック励振の例の一つであるブランコの場合との比較を通じ、本研究で考案したライジング号のモデルにおいて船内の人の変位を固有角振動数と同じ角振動数で周期的に変化させた場合パラメトリック励振が生じることを明らかにした。この結果は、固有角振動数の 2 倍の角振動数で周期的に回転軸からの重心位置を変化することでパラメトリック励振が生じるブランコの例とは異なり、数値計算結果からもその傾向を確認することができた。また、抵抗を考慮して数値計算をした結果、人がライジング号上を固有角振動数で動いたとき振幅の増幅とまではいかないものの振動の減衰を緩和できることがわかった。加えて、実際に現地でライジング号を用い検証を行ったが、今回考慮していなかった要因によりパラメトリック励振の有意な兆候はみられなかった。今後の展望として、安定性解析を行いより詳しくパラメトリック励振の起こりうる条件を調べることで、天候条件、体調管理、試行回数の増加により定量的な測定を行うことである。

本研究は、高知県にある身近なものを対象として創造広場アクトランドにおいて誰でも利用できる人力遊具について考察したものであり、高知出身の物理学者である寺田寅彦の意思に通ずるものがあると考えている [12]。アクトランドには上記のライジング号以外にも人力遊具が数多くあり、身体を使って実際に物理学を感じるのに最適な施設である。こうした他の施設では見られないような人力遊具に関する力学的考察は、高知県における物理学及び地域交流の新たな可能性を切り拓くものと期待される。

## 謝辞

本研究を実施するにあたり、ご協力頂いた近藤良美様、川村慎二様、創造広場アクトランド様にはこの場を借りて感謝申し上げます。

[1] 創造広場「アクトランド」公式サイト, <http://actland.jp>.  
 [2] 八木 一正, 遊園地を科学しよう! 力とエネルギーのひみつを探る, PHP 研究所 pp 45-47 (2014).  
 [3] H. Kajiwara, Y. Hashimoto, T. Matsuda and T. Tsuchiya, *Control of Swing Using Entrainment*, Journal of the Robotics of Japan **17-4** pp 520-525 (1999).  
 [4] B. Piccoli and J. Kulkarni, *Pumping a swing by standing and squatting: do children pump time optimally?*, IEEE Control Systems Magazine **25-4** pp 48-56 (2005).  
 [5] 梶原 秀一, 橋本 幸男, 土谷 武士, 日本機械学会論文集 (C 編) **67-663** pp 3545-3460 (2001).

[6] 日西 杜夫, 梶原 秀一, 青柳 学, 花島 直彦, 周期入力制御によるパラメータ励振系のエネルギー制御と強制引き込み現象 - 実機による検証 -, 計測自動制御学会システムインテグレーション部門講演会論文集 SI2016 **17** pp 1864-1867 (2016).  
 [7] 梶原 秀一, 花島 直彦, 青柳 学, 周期入力制御系の数理構造と強制引き込み現象, 計測自動制御学会論文集 **52-10** pp 573-579 (2016).  
 [8] 梶原 秀一, 青柳 学, 花島 直彦, 周期入力によるブランコの振幅制御, 自動制御連合講演会講演論文集 第 61 回自動制御連合講演会 (2018).  
 [9] 戸田盛和, 振動論, 培風館 (1995).

[10] 今井功, 物理テキストシリーズ流体力学, 岩波書店 (2020).

[11] 国立天文台, 理科年表 2021, 丸善出版 (2020).

[12] 寺田寅彦, 寺田寅彦全集, 岩波書店 (1997).