

# ものづくり幾何教材を用いた 小学校における授業の設計と実践例

河内美智(高知市立第六小学校),  
久保田典子(高知市立第六小学校),  
小松和志(高知大学理工学部),  
筒井公平(高知市立第六小学校)

## 概要

実物を手作りできる教材は「手を使って考える」という活動を伴うことから、アクティブラーニング、問題解決型授業に適した教材であると考えられる。大学において共通教育、専門教育の授業で使っている実物を手作りできる幾何教材(ものづくり幾何教材)を基にして、小学校の授業の教材2つを開発した。そのうちのひとつの実践を報告する。

## 1. ものづくり幾何教材

手作りできる幾何教材を、小松は共通教育科目「体験する数学(副題:ものづくり幾何学)」と専門教育科目「数学課題探究(幾何学特論I)」で用いている。「体験する数学」では、理系の受講生だけではなく、文系の受講生が多いという状況にある。そのために、数式を使わず、手を動かして実物を作るという活動を取り入れた自前の教材で編成している。調べることの面白さと達成感を味わうことを目的とした教材である。この授業では期末レポートを課しているが、レポートの内容は自分がアレンジして製作したものとその説明である。「数学課題探究(幾何学特論I)」は課題探究・問題解決型の授業として実施されている。科目名に変遷はあるが、15年を超えて担当を続けている。手を動かして実物を作るという「体験する数学」と同様の活動を経て、さらに、自ら問題を設定し、それを研究してゆくというスタイルを取っている。ものづくり幾何教材を用いることで、主体的に取り組み、試行錯誤をする中で数学的思考力を獲得することを目標としている。

一方で、算数という教科において、数学的思考力を育てるための算数的活動が授業に取り入れられている。そこでは「手を使って考える」というハンドオン・マスやオープンエンド・アプローチが活用されている([12],[13],[17])。手を動かし、観察することが「問い」をもつことにつながる([8])。

前者と後者で目指すもの、取り組みは同じである。小松は算数的活動(数学的活動というべきか)と“問いを創る”活動を授業に取り入れてきたということになる。使っている幾何教材を基にして、小学校の授業の教材を開発する。調べることの面白さと達成感を味わうことを教材の目的として設定する。また教材によっては小学校で学ぶ(学んだ)内容を活用することで、理解が実感を持ったものへと深化することも目的とする。研究成果を内容に盛り込んでいるなど、独自性の高い次の6つの教材を候補とした。

### (1) サッカーボールを作ろう。

多面体を組み立てるポリドロンという教材を使って実際にサッカーボールの形を作る(右の画像)。正五角形と正六角形からなる形に共通する性質を見てゆく。フラーレンという物質の数理モデルについても学ぶ。

### (2) ポップアップスピナーを作ろう。

ポップアップスピナーと呼ばれる開くと羽が回転する飛び出すカードを作る。「なぜ、羽が回転するのか」を考えていく。

### (3) パタパタパズルを作ろう。

平面上で正多角形をリング状につなぎ合わせてできるパタパタパズルという折り畳みパズルを作成する。貼り合わせた辺のところまで折って変形すると絵や形が得られる。タイル貼りとの関係についても学ぶ。



(4) 敷き詰め模様（タイル貼り）を作ろう。

Substitution rule と呼ばれるタイル貼りを作る方法を学ぶ。中世イスラム建築の装飾やエッシャーのタイル貼り芸術作品との関係についても学ぶ。

(5) らせん折りをしてみよう。

らせんを作るように紙を折り畳んで、どのような形ができるかを調べる。その究極の形であるバネのような構造をもつ折り紙スプリングについても紹介する。

(6) カライドサイクルを作ろう。

三角形，四角形のパネルを貼り合わせて作った変形可能な図形を題材とする。裏返し変形ができるフレクサチューブのような図形について学んだ後，四面体をリング状につなぎ合わせることで回転変形ができるカライドサイクルを作成する。

(1)については，[2]，[7]，[9]，[12]において教材として取り上げられている。[6]の研究成果を盛り込んでいる。2014年度，2019年度の高大連携の交流授業「高校生のためのおもしろ科学講座」における教材として使用した。

(2)については，[11]，[19]の研究成果を盛り込んでいる。

(3)については，[4]の研究成果を盛り込んでいる。

(4)については，[1]，[7]，[9]，[17]において教材として取り上げられている。[10]では，高等学校での理数科の科目「課題研究」における，この教材を活用した年間学習指導計画を作成している。[20]，[21]，[22]の研究成果を盛り込んでいる。

(5)については，[23]において教材として取り上げられている。折り紙スプリングは[15]において紹介されている。[5]の研究成果を盛り込んでいる。

(6)については，カライドサイクルは[17]において教材として取り上げられている。[18]にはカライドサイクルの多彩な型紙がある。フレクサチューブ等の裏返し変形については[16]に説明がある。[3]，[14]の研究成果を盛り込んでいる。

## 2. 教材の開発

今回は，(1)と(2)を基にして，小学校の授業の教材を開発することにした。行う授業として，1時限(45分)を想定する。そのため時間を考慮して，児童が問いを創るということから始める形はとらないことにした。

(1)の場合は教材を作り直すときに説明の部分だけを変更するだけで対応することができた。正五角形と正六角形からなるサッカーボールのような構造はフラレンという分子の数理モデルである。教材にはこの数理モデルを研究した際に得られたことを盛り込んでいる。ポリドロンを使って実際にサッカーボールの形を作成する。さらにサッカーボールの形だけではなく，正五角形と正六角形からなる形に共通する「正五角形の枚数は必ず12枚になる。」という性質を見てゆく。この説明において，オイラーの公式を証明なしに認めてもらうということが気になっている。小学校では立体は立方体，直方体，角柱，円柱しか学習していない。そのため，児童がオイラーの公式をどれだけ実感できるかを確かめながら授業を進める必要がある。

授業の内容	関連する学習内容	配当時間
(活動) ポリドロンを使ってサッカーボールの形(サッカーボール多面体)を作成する。	5年：正多角形，内角	20分
(発問)「サッカーボールの面，辺，頂点の数はそれぞれ何個あるか？」		10分
(発問)「正五角形と正六角形からなる形に共通することは何か」		10分
説明		5分
(活動) ポリドロンを使ってとにかく大きな形を作成する。		時間が許せば

(2)の場合は教材を作り直すことが非常に難しかった。大学で使用してきた教材は既に13回程、大小の改訂を繰り返したものであったが、今回、根本から大幅に作り直すことになった。一番の大きな変更は、手を動かす活動において、型紙の作成と折る活動を分離したことにある。折るという活動に不慣れな児童がいることを想定してのことである。折ることに対して、折った結果が分かりやすい素材として、サイズが大きく堅めの紙を使うことにして、八つ切り画用紙をそのまま使うことにした。

授業の内容	関連する学習内容	配当時間
(活動) A4の紙から、製作の基本となる直角二等辺三角形の形を折り出す。	2年：長方形，正方形，直角二等辺三角形	5分
(活動) ポップアップスピナーの型紙を作成する。	4年：垂直と平行 6年：縮図	10分
(活動) ポップアップスピナーを製作する。		20分
(発問)「ポップアップスピナーの羽はなぜ回転するのか？」		5分
説明		5分
(活動) アレンジしたポップアップスピナーを製作する。		時間が許せば

(1), (2)ともに、表にした授業計画の配当時間は高学年(5, 6年生)を対象とした場合を想定したものである。これらの配当時間はあくまで目安である。手を動かす活動は時間が読めないということが悩ましく、うまく時間を調整することは難しさを伴う。活動を個別に行うか、グループで行うかによってもかかる時間は異なる。活動中に児童が発した問いを拾い上げることができるやり方を工夫しなければならない。

(1)は補助があれば、1年生から実施可能であると考えられる。(2)は折るという活動を伴うため、高学年を対象とする方が望ましいと考えられる。

### 3. 実際の授業の様子 ((1)の実践例)

夏休み期間中の学習活動として、2019年7月26日に高知市立第六小学校において希望者を対象に授業を行った。希望者の内訳は1年生3名、2年生0名、3年生1名、4年生1名、5年生2名、6年生2名であり、合計は9名であった。1年生が3名いることから(1)の教材を用いることにして、サッカーボール多面体の作成とそれ以外の正五角形と正六角形からなる形を比べるという内容にした。1時限(45分)の授業を私たち4名が担当する体制で実施した。

授業の導入部分では、サッカーボール多面体とサッカーボールの関係を説明し、なじみのある箱の形である立方体やそれよりはなじみのないであろう正八面体を見てもらった。児童らとのやり取りから、1年生であってもこれらの内容がイメージできていることを確認できた。

次に、ポリドロンを使って、サッカーボール多面体を作成してもらった。今回はサッカーボール多面体を作るために必要なポリドロン(正五角形12枚、正六角形20枚)をジップロックに小分けにして、各自に渡した。続いて、サッカーボールの実物を用いてその特徴を説明し、2つのポリドロンのパーツをつなぎ合わせるやり方について説明した。

作成する活動を始めてすぐに、立体的な形を作るための具体的なやり方(コツ)の説明無しでは難しいことが分かったため、「(平らな状態でつなぎ合わせて)花の形を作る。」などの指示やヒントを出した。さらに、「(サッカーボール多面体に限らず、)面白い形や変わった形を作るのも良いよ。」という指示を出して、自由に形を作ってもらうことになった。1年生には私たちのうち2名が補助についた。早く自分のものを作り終わった5, 6年生が自主的に他の子の手助けに入っていた。

終了時間までに、1年生3名を含め、9名全員が正五角形と正六角形からなる形を作成することができた。9名のうち、5名はサッカーボール多面体を、あとの4名はサッカーボール多面体以外の形を作成した。4名のうち2名は正六角形の周りに正五角形が配置されているという特徴をもつ形を作っていた。これは、こちらがサッカーボール多面体以外の形として提示することを準備していた形である。また、正六角形を1点の周りに3枚配置すると、平坦な面ができるということに気付いた児童がいた。

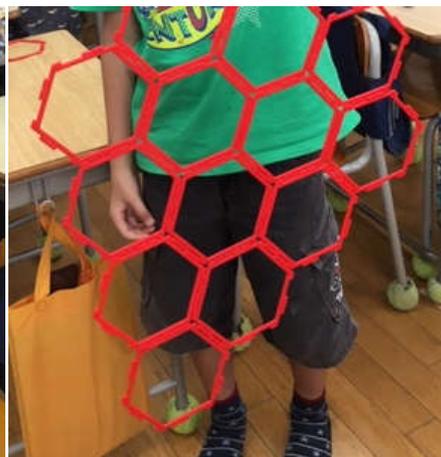
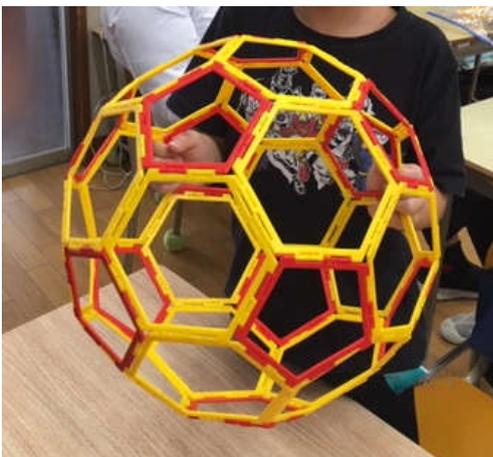
(児童の感想、授業の写真)

- ・5かくけいと6かくけいでまるのかたちをつかったのがたのしかったです。(1年男子)
- ・さっかーぼーるたのしかった。ぼくはがんばりました。(1年男子)
- ・サッカーボールを作りました。楽しかったよ。形を作るのが楽しかったです。また作りたいです。(3年男子)
- ・ポリドロンを作りました。サッカーボールをきれいに作りました。作って楽しかったです。また作りたいです。(5年男子)
- ・ポリドロンでサッカーボールやぶどうのふさのような形を作りました。どんどんできると楽しかったです。また作ってみたいと思いました。(5年男子)
- ・授業に来てくれてありがとうございました。楽しかったことはサッカーボールを作ったことです。積み上げて雪だるまを作ったりして頭をたくさん使いました。そして、思い出に残っているのは写真をとったことです。あの写真をいつか見たいなー。これからも工作を通した数学の授業をがんばって下さい。(6年女子)



授業の様子

ただいま製作中



できあがったもの (3例)

#### 4. 今後の課題

(i) ポリドロンで立体的な形を作るための具体的なやり方(コツ)やその説明の仕方について、十分に検討する必要がある。サッカーボール多面体を目標に作る場合と自由に形を作る場合などヴァリエーションをもたせる。

(ii) 作ったものについて、ひとりひとり発表していく場を作る。コメントを加えることができるように、個別に作成の様子を把握しておく必要がある。

(iii) オイラーの定理から「正五角形の枚数は必ず12枚になる。」が導かれるのであるが、必要なポリドロン(正五角形12枚, 正六角形20枚)を小分けにして渡したので、形が完成すると正五角形は必ずびったり無くなる。手を動かして「正五角形の枚数は必ず12枚になる。」を実感することになる。今回は時間がなく、この点を確認できなかったため、このための時間を確保したい。

(iv) (1)「サッカーボールを作ろう。」の教材は当初、2節に書いたように高学年(5,6年生)を対象に1時限(45分)で計画したものであったが、今回の実践から授業計画を見直すことを検討したい。4年生以下が対象である場合には今回の内容で1時限(45分)とし、高学年(5,6年生)が対象である場合は今回の内容を1回目として、2回目には「正五角形の枚数は必ず12枚になる。」の証明を含めたより進んだ内容を行う2時限(45分×2)の授業計画へと見直したい。もし機会をいただければ、見直し後の授業計画の教材(1)及び未実践の教材(2)の授業を実施してみたい。

#### 謝辞

この実践例を論文として形にすることが出来たのは、この実践の実施を許可いただいた高知市立第六小学校 市原俊和校長先生や、夏休み中にもかかわらず授業に熱心に参加して取り組んでくれた子どもたちのおかげです。皆様に心から感謝の気持ちと御礼を申し上げます。

#### 参考文献

- [1] 秋山仁, 松永清子, 新しい算数の話 5年生(シリーズ朝の読書の本だな), 東京書籍(2013)
- [2] 秋山仁, 松永清子, 新しい算数の話 6年生(シリーズ朝の読書の本だな), 東京書籍(2013)
- [3] 江居宏美, 小松和志, 山内昌哲, 偶数枚の直角二等辺三角形パネルから成る多面的アニュラスのリバーシブルについて, 高知大学理工学部紀要, 第1巻(2018), No. 7
- [4] 江居宏美, 林浩子, 小松和志, 正五角形リングパズル(Regular pentagon ring puzzle), 高知大学理工学部紀要, 第1巻(2018), No. 6
- [5] 江居宏美, 林浩子, 小松和志, 穴あき折紙スプリング(Origami spring having a central hole), 高知大学理工学部紀要, 第2巻(2019), No. 5
- [6] 岡村駿, フラーレン多面体の組み合わせ構造についての研究, 修士論文, 高知大学(2016)
- [7] 小沢健一(編), 数学教育協議会(編), 算数・数学おもちゃ箱一作って・さわって・遊ぶ(「数学教室」別冊(6)), 国土社(1998)
- [8] 鹿嶋真弓, 石黒康夫, 問いを創る授業: 子どものつぶやきから始める主体的で深い学び, 図書文化社(2018)
- [9] 銀林浩(編), 数学教育協議会(編), 算数・数学なぜなぜ事典, 日本評論社(1993)
- [10] 小松和志, 山内昌哲,  $n$ 回対称性をもつ準結晶構造の数学的モデルから得られる教材の開発とその活用, 高知大学理工学部紀要, 第1巻(2018), No. 4
- [11] 小松和志, 平口敦基, 森本雅智, キャンディの包み紙原理(Candy wrapping paper principle), 高知大学理工学部紀要, 第2巻(2019), No. 7
- [12] 坪田耕三, ハンズオンで算数しよう一見て、さわって、遊べる活動 東洋館出版社(1998)
- [13] 坪田耕三, ハンズオンマス研究会, 楽しい算数的活動の授業(ハンズオンで算数しよう) 東洋館出版社(2000)
- [14] 土居舞子, 山下智世, 多面的曲面のフォールディングに関する研究, 卒業論文, 高知大学(2015)
- [15] 布施知子, らせんを折ろう(折り紙コレクション), 筑摩書房(1992)
- [16] 前原潤, パネルで作った曲面を裏返す, 数学セミナー 2009.01, 22-27

- [17] 吉田映子, さわって、つくって、みつけて…算数! 「考えるって楽しい!」授業 東洋館出版社(2015)
- [18] R. Byrnes, *Metamorphs : Transforming Mathematical Surprises*, Tarquin Publications(2005)
- [19] H. Ei, H. Hayashi and K. Komatsu, Analysis of the Motion of the Pop-up Spinner, *Forma*, Vol. 31 (No. 1), pp. 1-5, 2016
- [20] K. Kato, K. Komatsu, F. Nakano, K. Nomakuchi, M. Yamauchi, Remarks on 2-dimensional quasiperiodic tilings with rotational symmetries : *Hiroshima Math. J.* 38(2008), 385-395
- [21] H. Hayashi, Y. Kawachi, K. Komatsu, A. Konda, M. Kurozoe, F. Nakano, N. Odawara, R. Onda, A. Sugio, and M. Yamauchi, Notes on vertex atlas of Danzer tiling: *Nihonkai Math. J.* 22 (2011), 49-58
- [22] H. Hayashi, K. Komatsu and M. Yamauchi, A note on the construction of non-periodic tilings by attaching wedge-shaped unbounded configurations : *Kochi J. Math.* 10(2015), 53-60.
- [23] T. Hull, *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics* (2nd Ed.), A K Peters/CRC Press; (2012) (邦訳 羽鳥 公士郎(翻訳), ドクター・ハルの折り紙数学教室, 日本評論社 (2015))