

偶数枚の直角二等辺三角形パネルから成る 多面体的アニユラスのリバーシブルについて

Reversing a polyhedral annulus of even isosceles right triangles by origami-deformation

江居宏美 Hiromi EI(弘前大学理工学研究科)
小松和志 Kazushi KOMATSU(高知大学理工学部)
山内昌哲 Masatetsu YAMAUCHI(沖縄県立球陽高等学校)

Abstract

偶数枚の直角二等辺三角形から成る多面体的アニユラスを扱う。ここでは、ひねりや結び目がないことを仮定する。多面体的アニユラスが表裏を裏返す折り紙変形を許すとき、リバーシブルであるという。リバーシブルであるための、直角二等辺三角形の数の条件を調べる。

We consider a polyhedral annulus of even isosceles right triangles. Assume that a polyhedral annulus is not twist and knotted. A polyhedral annulus is defined to be reversible if there exists an origami-deformation which deforms itself to its reflection. We study the condition of the number of isosceles right triangles for the reversibility of a polyhedral annulus.

1. はじめに

3次元 Euclid 空間 \mathbf{R}^3 の多面体的アニユラス M とは、有限個の (平面) 多角形を長さが等しい辺同士でひねりが生じないようにつなぎ合わせてできる離散的曲面で、 $S^1 \times [0, 1]$ に同相なものをいう。ここで、 S^1 は単位円周、 $[0, 1]$ は単位閉区間を表す。また、この論文では M が自明でない結び目を成していないことを仮定する。 M を構成する各多角形をパネルと呼び、その厚さを 0 とする。多角形としての辺や頂点を、それぞれパネルの辺、パネルの頂点と呼ぶことにする。また、多角形としての面、辺、頂点を、それぞれ M の面、 M の辺、 M の頂点と呼ぶことにする。

いま、多面体的アニユラス M に表面と裏面を決めることができる。後で図で使うので、一方を黒色に、他方を白色に色づけしておく。このとき、パネルの表面と裏面も色づけされる。

多面体的アニユラス M の折り紙変形とは、3次元 Euclid 空間 \mathbf{R}^3 内での M の連続的な変形であり、その変形過程で、各面は剛体として動き、形を変えず、かつ面どうしの接触することや重なることは許すが、交差することや一方が他方を通

り抜けることを許さないものをいう (参考文献は [4] を参照).

多面体的アニュラス M の隣り合うパネル P, Q の二面角とは, P, Q の共有する辺上のある 1 点から, 各パネル上でその辺に垂直な直線を引いたとき, この 2 直線の作るなす角の大きさをいう. ここでは, 黒色の面側の角度をパネルの二面角とする. この二面角の取りうる値の範囲は 0° から 360° である.

多面体的アニュラス $M \subset \mathbf{R}^3$ がリバーシブルであるとは, M からある平面に対する M の鏡像への折り紙変形が存在するときをいう.

リバーシブルである多面体的アニュラスの例には, フレキサチューブ (Flexatube) やロンボチューブ (Rhombotube) などがある ([4]).

今, 次の (a) を満たす 3 次元 Euclid 空間 \mathbf{R}^3 内の $2n$ の辺をもつ $2n$ 辺形を考える.

(a) 全ての辺の長さが同じで, 全ての隣り合った辺の間の成す角度が θ に等しい, 等角等辺 $2n$ 辺形,

θ が 90° (すなわち, 直角) であるとき, (a) の等角等辺 $2n$ 辺形に面を貼ることで, 合同な $2n$ の直角二等辺三角形から成る多面体的アニュラスが得られる. また, 多面体的アニュラスの折り紙変形は対応する (a) の等角等辺 $2n$ 辺形の連続変形を導く. この多面体的アニュラスに対しても, ひねりや結び目をもたないことが仮定されていることに注意する. $n = 1$ のとき, 2 個の直角二等辺三角形から成る多面体的アニュラスは存在しない. $n = 2$ のとき, 4 個の直角二等辺三角形から成る多面体的アニュラスは 2 つの 2 辺形を境界としてもつ平坦な正方形を形作り, 鏡像の関係にある 2 つの多面体的アニュラスだけが存在する. $n = 3$ のとき, 4 個の直角二等辺三角形から成る多面体的アニュラスは 2 つの 3 辺形 (正三角形) を境界としてもつ鏡像の関係にある 2 つの多面体的アニュラスだけが存在する.

私たちは, (a) の等角等辺 $2n$ 辺形から得られる $2n$ の直角二等辺三角形から成る多面体的アニュラスがリバーシブルかどうかを調べた.

定理. n を $n \geq 4$ である自然数とする. このとき, 角度 90° をもつ等角等辺 $2n$ 辺形から得られる $2n$ 枚の直角二等辺三角形から成る多面体的アニュラス M はリバーシブルである.

ここで, 次の (b),(c) の 3 次元 Euclid 空間 \mathbf{R}^3 内の $2n$ の辺をもつ $2n$ 辺形を考える.

(b) 全ての辺の長さが同じで, ひとつの辺の両端の角度が自由であるが, 他の角度は θ に等しい, 等辺 $2n$ 辺形,

(c) ひとつの辺の長さは自由で, 他の辺の長さが同じであり, ひとつの辺の両端の角度が自由であるが, 他の角度は θ に等しい, $2n$ 辺形.

θ が正四面体角であるとき, (a),(b) は環状分子の立体構造の数理モデルとして取り扱われることがある ((a) については [1], (b) については [3] 参照). (c) は長さ $2n - 1$ の直鎖分子の立体構造の数理モデルとして取り扱われることがある ([1],[5] 参照).

(a) の等角等辺 $2n$ 辺形の全体から成る配置空間を \mathcal{P}_{2n} で表し, (b) の等辺 $2n$ 辺形の全体から成る配置空間を \mathcal{C}_{2n} で表し, (c) の $2n$ 辺形の全体から成る配置空間を \mathcal{S}_{2n} で表すことにする. このとき, 自然な包含写像 $\mathcal{P}_{2n} \rightarrow \mathcal{C}_{2n} \rightarrow \mathcal{S}_{2n}$ が存在する.

$\theta = 90^\circ$ かつ $n \geq 4$ のとき, 配置空間という観点から見ると, 次の事柄が示される. 定理の証明をよく見ると, 多面体的アニュラスは 1 箇所の二面角が 0° から 360° まで, 変化するような折り紙変形が存在することが分かる. 多辺形の連続変形では, 二面角を計るために貼られた面は仮想的なものなので, それらの面が交差することや一方が他方を通り抜ける面の通り抜けは許される. そのため, 多面体的アニュラスの 1 箇所の二面角が 0° から 360° まで, 変化するような折り紙変形は配置空間におけるループを定め, それに代表される基本群の元を定める. \mathcal{S}_{2n} は二面角でパラメータ付けられることより, S^1 の $2n - 2$ 個の直積と同相であるので, このループが代表する \mathcal{S}_{2n} の基本群の元は単位元とは異なる. そのため, 自然な包含写像から誘導される準同型写像により, この元に写される \mathcal{P}_{2n} と \mathcal{C}_{2n} の基本群の元も単位元とは異なる. よって, $\theta = 90^\circ$ かつ $n \geq 4$ のとき, \mathcal{P}_{2n} と \mathcal{C}_{2n} の基本群は自明ではないことが分かる.

2. 準備

それでは, 次の補題 1 と 2 を証明しよう.

補題 1.

- (1) $n = 4, 5$ とする. このとき, $2n$ 枚の直角二等辺三角形から成る多面体的アニュラスはリバーシブルである.
- (2) $m = 7, 9$ とする. このとき, m 枚の直角二等辺三角形とこの直角二等辺三角形の斜辺でない辺と同じ長さをもつ 1 枚の正方形から成る多面体的アニュラスはリバーシブルである.

補題 1 の証明. ここでは, (1) の $n = 4, 5$ の場合だけを証明する. $n = 4$ の場合は, [2] の折り手順による ($m = 7$ の場合は, Figure 1 の 1 のパネル BFG を正方形に置き換えれば, $n = 4$ の場合と同様な折り紙変形で示すことができる. $m = 9$ の場合は, Figure 2 の 1 のパネル AGF を正方形のパネルを置き換えれば, $n = 5$ の場合と同様な折り紙変形で示すことができる).

まず, Figure 1 の 1 に, 8 枚の直角二等辺三角形から成る多面体的アニュラス M_8 を与える. この M_8 は, 辺 AE, ED, DH, HC, CG, GB, BF, FA の中点が 1 つの平面 α (とおく) 上にあり, かつ M_8 のすべての二面角は 180° より小さい状態とする. これから, Figure 1 の 1 の M_8 がリバーシブルであることを示そう. これは, Figure 1 の 1 の M_8 には平面 α に関して鏡像になるような折り紙変形が存在することを示せばよい.

では, まず, Figure 1 の 1 の M_8 に, M_8 の 4 組の面 AFB と面 BFG, 面 BFG と面 BCG, 面 CHD と面 DHE, かつ面 DHE と面 ADE の二面角が 0° になるように, M_8 の境界点 A, C を, M_8 の内側に折り込むような折り紙変形を施す. そうすると, Figure 1 の 1 の M_8 は, Figure 1 の 2 の M_8 となる. 次に, Figure 1 の 2 の M_8 に, M_8 の 2 組の面 AEF と面 ADE, かつ面 BGC と面 CGH の二面角が 0° になるように, M_8 の辺 GE に沿って折るような折り紙変形を施す. そうすると, Figure 1 の 2 の M_8 は, Figure 1 の 3 の M_8 となる. さらに Figure 1 の 3 の M_8 に, M_8 の 2 組の面 AFB と面 AEF, かつ面 CGH と面 CHD の二面角が 0° になるように, M_8 の境界点 E と G, かつ境界点 B と D をくっつけるような折り紙変形を施す. そうすると, Figure 1 の 3 の M_8 は, Figure 1 の 4 の M_8 とな

る. さらに続けて Figure 1 の 4 の M_8 に, M_8 の 2 組の面 AFB と面 BFG, かつ面 CGH と面 CHD の二面角が 180° になるように, M_8 の辺 HF に沿って折るような折り紙変形を施す. そうすると, Figure 1 の 4 の M_8 は, Figure 1 の 5 の M_8 となる. 最後に, Figure 1 の 5 の M_8 に, M_8 の 4 組の面 AFB と面 BFG, 面 BFG と面 BCG, 面 CHD と面 DHE, かつ面 DHE と面 ADE の二面角が 180° より大きくなるように, M_8 の境界点 B, D を外側に折り込むような折り紙変形を施す. そうすると, Figure 1 の 5 の M_8 は, Figure 1 の 6 の M_8 となる.

故に, Figure 1 の 1 の M_8 には, Figure 1 の 6 の M_8 となるような折り紙変形が存在することが示せた. したがって, 8 枚の直角二等辺三角形から成る多面的アニュラスはリバーシブルであることが示せた.

次に, $n = 5$ の場合を示す. Figure 2 の 1 に, 10 枚の直角二等辺三角形から成る多面的アニュラス M_{10} を与える. このとき, 直角二等辺三角形の斜辺の長さは $\sqrt{2}$ とする. この M_{10} は, 辺 AF, FE, EJ, JD, DI, IC, CH, HB, BG, GA の中点が 1 つの平面 β (とおく) 上にあり, かつ M_{10} のすべての二面角は 180° より小さい状態とする. これから, Figure 2 の 1 の M_{10} がリバーシブルであることを示そう. これは, Figure 2 の 1 の M_{10} には, 平面 β に関して鏡像になるような折り紙変形が存在することを示せばよい.

では, まず, Figure 2 の 1 の M_{10} に, M_{10} の 2 組の面 AGB と面 AFG, かつ面 AFG と面 AEF の二面角が 0° になるように, M_{10} の境界点 B と D をくっつけるような折り紙変形を施す. そうすると, Figure 2 の 1 の M_{10} は, Figure 2 の 2 の M_{10} となる. 次に, 面 EJF と面 EDJ の二面角が 0° になるような折り紙変形を施す. そうすると, Figure 2 の 2 の M_{10} は, Figure 2 の 3 の M_{10} となる. 次は, 面 AEF と面 EJF の二面角が 0° になるように, 辺 EF に沿って折るような折り紙変形を施す. そうすると, Figure 2 の 3 の M_{10} は, Figure 2 の 4 の M_{10} となる. さらに, 面 AEF と面 AFG の二面角が 180° になるように, 辺 AF に沿って折るような折り紙変形を施す. そうすると, Figure 2 の 4 の M_{10} は, Figure 2 の 5 の M_{10} となる. さらに続けて, Figure 2 の 5 の M_{10} に, M_{10} の 3 組の面 AFG と面 AEF, 面 DJE と面 DIJ, かつ面 DIJ と面 DCI の二面角が 180° より大きくなるように, M_{10} の境界点 A, D を外側に折り込むような折り紙変形を施す. そうすると, Figure 2 の 5 の M_{10} は, Figure 2 の 6 の M_{10} となる. このとき, 境界点 C だけ, 変形が完了していない状態である. すなわち, 境界点 C を含む面 CID と面 CHI, かつ面 CHI と面 CBH の二面角が 180° より小さい. 多面的アニュラスの境界の連結成分は, 全ての辺が同じ長さ $\sqrt{2}$ をもつ等辺 n 辺形である. 今, $n \geq 5$ であるので, 等辺 n 辺形 ABCDE は辺 BC と辺 CD が一直線上にのる状態を経て, Figure 2 の 6 の 等辺 n 辺形 ABCDE は, Figure 2 の 7 の 等辺 n 辺形 ABCDE へと連続変形ができる. それに伴って, Figure 2 の 6 の M_{10} は, Figure 2 の 7 の M_{10} へと連続変形される.

故に, Figure 2 の 1 の M_{10} には, Figure 2 の 7 の M_{10} となるような折り紙変形が存在することが示せた. したがって, 10 枚の直角二等辺三角形から成る多面的アニュラスはリバーシブルであることが示せた.

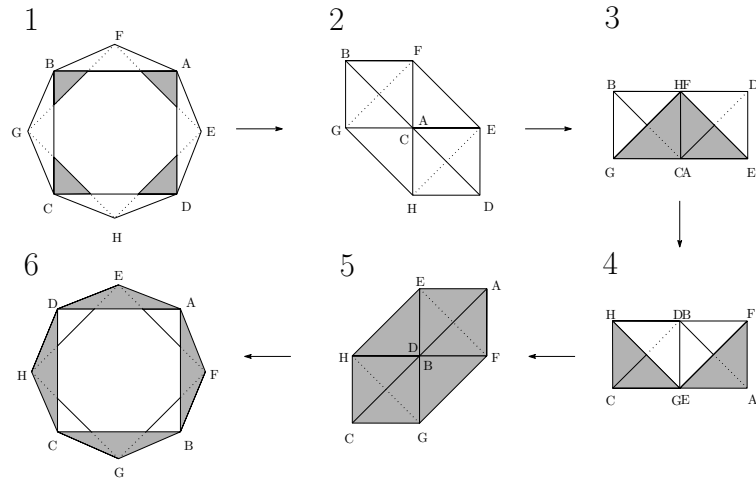


Figure 1: $n = 4$ の場合

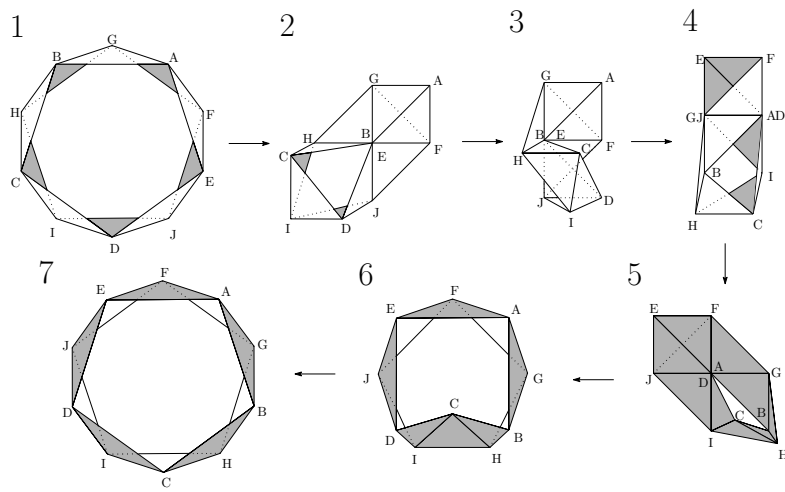


Figure 2: $n = 5$ の場合

□

補題 2. q を自然数とする. このとき, $4q$ 枚の直角二等辺三角形から成る多面体的アニュラス M_{4q} は, M_{4q} を 1 枚の正方形のパネルのように扱うことができる.

補題 2 の証明. まず, $q \neq 1$ のとき, $4q$ 枚の直角二等辺三角形から成る多面体的アニュラス M_{4q} は, M_{4q} を 1 枚の正方形のパネルのように扱うことができることを Figure を用いて示そう. 次に, $q = 1$ のとき, 4 枚の直角二等辺三角形 M_4 は, M_4 を 1 枚の正方形のパネルのように扱うことができることを Figure を用いて示す.

では, まず, $q \neq 1$ のとき, $4q$ 枚の直角二等辺三角形から成る多面体的アニュラス M_{4q} を, Figure 3 に与える. この M_{4q} には, M_{4q} の境界が 1 つの直線上にあるような折り紙変形が存在することを示す. 次に, その M_{4q} の各パネルを重ねて, 1 枚の正方形のパネルのように扱えることを示す.

では, \mathbf{R}^3 において z 座標が 0 の平面に, Figure 4 のような $4q - 2$ 枚の直角二等辺三角形をつなぎ合わせた Figure を与える. Figure 3 の M_{4q} には, M_{4q} の境界が 1 つの直線上にあるような折り紙変形が存在するための十分条件は, Figure 4 の Figure から M_{4q} が得られることである. よって, Figure 4 の直角二等辺三角形と合同な 2 枚の直角二等辺三角形を用意して, それぞれ Figure 4 の各辺 EF, GH, HI, JE に沿ってつなぎ合わせる. そうすると, Figure 4 から Figure 5 の $((4q - 2) + 2)4q$ 枚の直角二等辺三角形から成る多面体的アニュラス M_{4q} が得られる. この Figure 5 の M_{4q} は, Figure 3 の M_{4q} の 1 つの状態を表している. したがって, Figure 3 の M_{4q} には, Figure 5 の M_{4q} のように, M_{4q} の境界が直線 EH 上にあるような折り紙変形が存在することが示せた. 次に, Figure 5 の M_{4q} の各パネルを重ねて, 1 枚の正方形のパネルのように扱えることを示す. まず, Figure 5 の M_{4q} を, k 本の直線 $f_k(x, y) = 0$ に沿って $k = 1, 2, 3, \dots, k - 1, k$ の順番で k 回の折り紙変形を施す. そうすると, Figure 5 の M_{4q} には, Figure 6 の M_{4q} になるような折り紙変形が存在する. さらに Figure 6 の M_{4q} を, k 本の直線 $g_k(x, y) = 0$ に沿って $1, 2, 3, \dots, k - 1, k$ の順番で k 回の折り紙変形を施す. そうすると, Figure 6 の M_{4q} には, Figure 7 の M_{4q} になるような折り紙変形が存在する.

故に, Figure 5 の M_{4q} は, 合計 $2k$ 回の折り紙変形により, Figure 7 の M_{4q} となる. このとき, M_{4q} のどの二面角も 0° , または 360° であり, M_{4q} は正方形の形に折り畳まれる. よって, $q \neq 1$ のとき, M_{4q} のすべてのパネルを, 1 枚の正方形のパネルのように扱うことができる.

次は, $q = 1$ のとき, 4 つの直角二等辺三角形から成る多面体的アニュラス M_4 は, どの二面角も 0° であり, Figure 7 のように正方形を形作る. よって, $q = 1$ のとき, M_4 のすべてのパネルを, 1 枚の正方形のパネルのように扱うことができる.

以上, q を自然数とすると, $4q$ 枚の直角二等辺三角形から成る多面体的アニュラス M_{4q} は, M_{4q} を 1 枚の正方形のパネルのように扱うことができることが示せた.

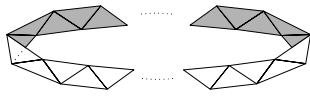


Figure 3: M_{4q}

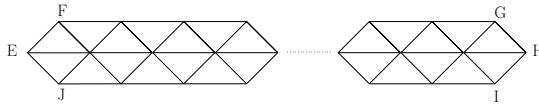


Figure 4: $4q - 2$ 枚の直角二等辺三角形をつなぎ合わせた図形

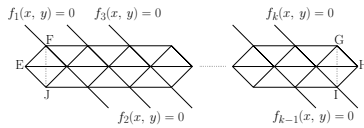


Figure 5: z 座標が 0 の M_{4q}

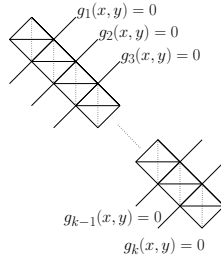


Figure 6: z 座標が 0 の M_{4q} の 1 つの状態



Figure 7: z 座標が 0 の M_{4q} の 1 つの状態

□

3. 定理の証明

$n = 4, 5$ の場合は, 補題 1 の (1) より示された. よって, n が 6 以上の自然数の場合は, $n = 2l, 2l + 1$ (l を 3 以上の自然数とする) と場合分けをする. ここでは, $n = 2l$ の場合だけを証明する ($n = 2l + 1$ の場合は, $n = 2l$ の場合と同様な議論で示すことができる).

まず, 補題 2 を用いて, $4l$ 枚の直角二等辺三角形をつなぎ合わせて得られる多面的アニュラス M_{4l} の一部の面が 1 枚の正方形のパネルのように扱えることを示す. その次に, 補題 1 の (2) を用いて M_{4l} がリバーシブルであることを示す.

では, $4l$ 枚の直角二等辺三角形をつなぎ合わせて得られる多面的アニュラス M_{4l} を, Figure 8 に与える. この Figure 8 の M_{4l} を, 2 つの辺 AB, CD を辺に沿ってつなぎ合わせる. そうすると, M_{4l} は, Figure 9 のように, 8 と $4(l - 2) (= 4q$ (q を自然数) とおく) 枚のパネルに分けることができる. この場合の M_{4l} は, 8 枚の直角二等辺三角形をつなぎ合わせた多面的アニュラス M_8 (とおく) と $4q$ 枚の直角二等辺三角形をつなぎ合わせた多面的アニュラス M_{4q} (とおく) を, ある辺に沿ってつなぎ合わせた多面的アニュラスと等しい. よって, 補題 2 より, Figure 9 の M_{4q} を, Figure 10 のように 1 枚の正方形のパネルのように扱うことができる. Figure 10 の M_{4l} に, M_{4l} の正方形のパネルとその隣りのパネル P_1 の二面角が 0° になるように, その共有する M_{4l} の辺に沿って折り紙変形を施す. そうすると, 正方形のパネルと P_1 を, 1 枚の正方形のパネルのように扱うことができる. よって, Figure 10 の M_{4l} を, Figure 11 の 7 枚の直角二等辺三角形とこの直角二等辺三角形の斜辺でない辺と同じ長さをもつ 1 枚の正方形をつなぎ合わせて得られる多面的アニュラスとして扱うことができる. よって, 補題 1 の (2) より, Figure 11 の多面的アニュラスはリバーシブルである. さらに Figure 11 の

多面的体的アニュラスをリバーシブルにしたものに、重なったパネルの各二面角がすべて 180° になるように、 P_2 と P_3 のパネルを引っ張るような折り紙変形を施す。そうすると、重なったパネルを次々とリバーシブルにすることができる。それ故、Figure 8 の M_{4l} が、リバーシブルであることを示したことになる。したがって、3 以上の自然数 l において、 $4l$ 枚の直角二等辺三角形をつなぎ合わせて得られる多面的体的アニュラス M_{4l} は、リバーシブルであることが示せた。

故に、 n が 6 以上の自然数のとき、 $2n$ 枚の直角二等辺三角形をつなぎ合わせて得られる多面的体的アニュラスはリバーシブルであることが示せた。

以上、補題 1 の (1) の $n = 4, 5$ の場合と n が 6 以上の自然数の場合を合わせて、 n を 4 以上の自然数とすると、 $2n$ 枚の直角二等辺三角形をつなぎ合わせて得られる多面的体的アニュラスは、リバーシブルであることが示せた。

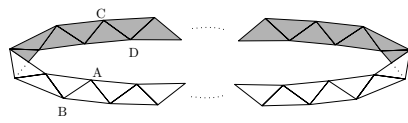


Figure 8: M_{4l}

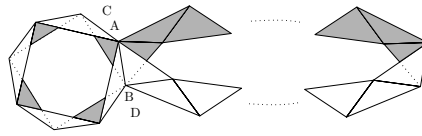


Figure 9: M_{4l} を M_8 と M_{4q} に分けた M_{4l} の 1 つの状態

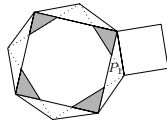


Figure 10: M_{4l} の 1 つの状態

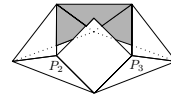


Figure 11: M_{4l} の 1 つの状態

□

References

- [1] E. D. Demaine and J. O'Rourke, Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra, Cambridge Univ. Press, 2007.
- [2] M. Doi and T. Yamashita, On the folding of polyhedral surfaces, undergraduate Thesis, Department of Mathematics Kochi Univ., (2015).
- [3] S. Goto and K. Komatsu, The configuration space of a model for ringed hydrocarbon molecules, Hiroshima Math. J., 42 (2012) 115-126
- [4] H. Maehara, Reversing a polyhedral surface by origami-deformation, European Journal of Combinatorics 31 (2010) 1171-1180.
- [5] J. O'Rourke, How to Fold It: The Mathematics of Linkages, Origami, and Polyhedra, Cambridge Univ. Press, 2011.