

n 回対称性をもつ準結晶構造の数学的モデル から得られる教材の開発とその活用

小松和志 (高知大学理工学部), 山内昌哲 (沖縄県立球陽高等学校)

概要

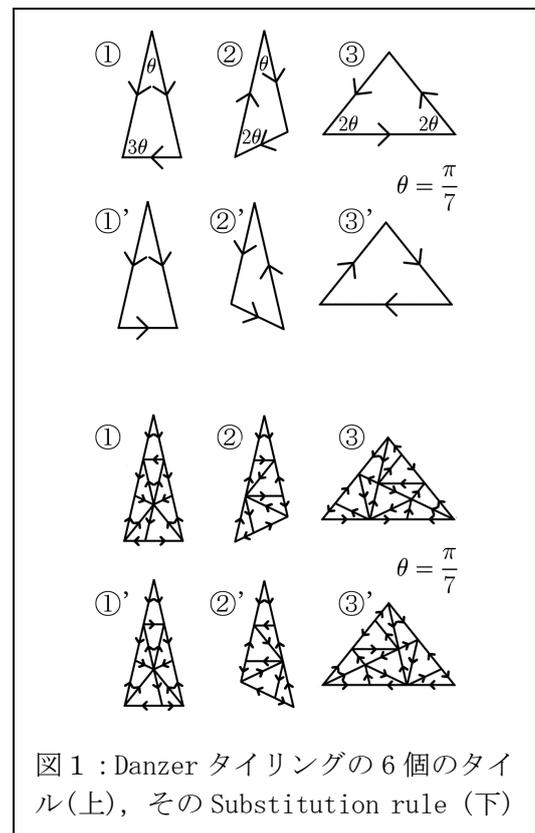
n 回対称性をもつ準結晶構造の数学的モデルである非周期タイリングから、教材を開発した。この教材は実物を手作りできることから、問題解決型、アクティブラーニングに適した教材であると考えられる。実際に、大学における共通教育、専門教育の授業で教材を活用した。また、高等学校での理数科の科目「課題研究」において、この教材を活用した年間学習指導計画を作成する。高校における課題研究は問題解決型、アクティブラーニング科目としての実施が求められている。適した教材を道具立てすることが、指導の場面で、現場の教員が抱える様々な問題を軽減することにつながると考えられる。

1. 教材の開発

1982 年, D. Schechtman (2011 年にノーベル化学賞を受賞)らにより 5 回回転対称性 (以下 5 回対称性という) をもつ Al-Mn 合金が発見された (発表は 1984 年)。それまでは, 規則正しい物質の構造は結晶であると考えられていた。しかしながら, 5 回対称性は結晶のもつべき平行移動対称性とは両立しない。これまでにない新しい秩序構造をもつ物質は後に準結晶と呼ばれるようになった。5 回対称性をもつ準結晶の数学的モデルとして注目されたのが, 1974 年に R. Penrose により考案された Penrose タイリングである。一般に, 準結晶構造の数学的モデルが非周期タイリングである。この非周期タイリングから, 教材を開発してゆく。

タイリングが周期的であるとは, 結晶のように平行移動対称性を許すときをいい, 非周期的であるとは, 全く平行移動対称性を許さないときをいう。一般には, タイリングが非周期的であることを示すことは難しい。しかしながら, [1]において, n が 5 または $n > 6$ を満たす任意の自然数において, n 回対称性をもつタイリングが非周期タイリングであることが示されている。そこで, 非周期タイリングとして n 回対称性をもつタイリングを構成する方法と得られたタイリングのもつ性質について学び, 調べることを教材とする。平面全体にタイルをすき間なく敷き詰めてタイリングを構成するために用いる規則として, Matching rule と Substitution rule を採用する。Matching rule とは, タイルにマークを付けて, マークが合うときにタイルを貼り合わせるというような, タイルの並べ方に関する制約の規則である。Substitution rule とは, タイリングに用いるタイルのそれぞれを縮小したタイルを用いて分割可能であるときに, その分割の仕方のことをいう。例として, 右の図 1 (上) に Danzer タイリングの 6 個のタイル, 右の図 1 (下) にその Substitution rule を挙げておく。

[1]では, n 回対称性をもつ非周期タイリングの構成法を定式化し, その構成によって得られたタイリングの性質が調べられている。構成法を定式化するために, パッチと呼ばれるタイルの集まりを考えて, それらからなる集合族に位相が導入されている。この位相を用いて, 極限として n 回対称性をもつ非周期タイリングが構成されることが示されている。この構成法を Danzer タイリングの場合に適用すると, 図 2 のような 7 回対称性をもつ Danzer タイリング



が得られる。

[2]では、5回対称性をもつ Penrose タイリングと7回対称性をもつ Danzer タイリングを比較して、共通する性質と異なる性質が調べられている。

[3]では、[1]で定式化した構成法で得られるタイリングを網羅的に調べ上げ、分類することが考察されている。

具体的な課題は論文[1], [2], [3]の内容をもとに設定する。

この教材から、代入(置き換え)という概念が、変数や式での値の代入という限られた範囲で用いられるものではなく、より一般的に取り扱われるべきであることを学ぶことができる。さらに、極限という概念が、数列や関数の極限という限られた範囲で用いられるものではなく、位相という見方より取り扱われるべきものであることを学ぶことができる。また、実物を手作りすることで、ユークリッド平面の等長変換や対称性といった内容を実感を伴って学ぶことができる。

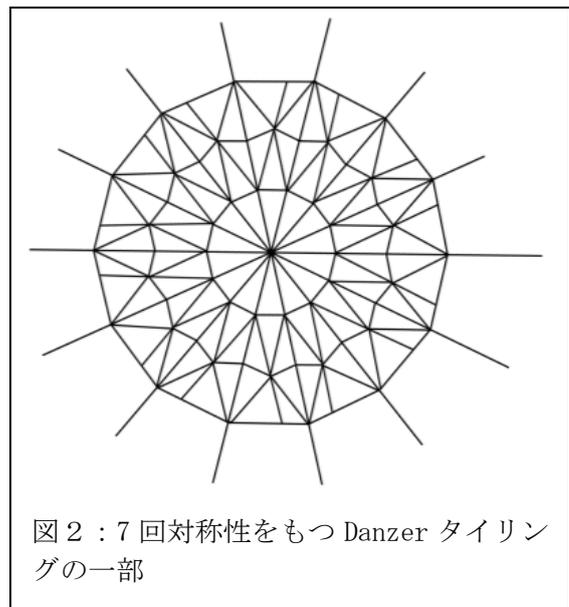


図2 : 7回対称性をもつ Danzer タイリングの一部

2. 活用事例

小松はこの教材を、共通教育科目「体験する数学」と専門教育科目「幾何学特論 I」で用いてきた。

「体験する数学」では、タイリングをテーマとする回を3回程度割り当てている。回数制約と理系の受講生だけではなく、文系の受講生が多いという状況から、この3回での到達目標は、Penrose タイリングの場合に、[1]の n 回対称性をもつ非周期タイリングの構成法を直感的に理解することとしている。そのために、次のような活動を取り入れている。

- ・「任意の三角形は単一でタイリングができるか？」や「任意の四角形は単一でタイリングができるか？」といった問題を考える。

各人に好きな形の三角形、四角形(必ずしも凸でなくてよい)を厚紙で切り出し、それを型紙にして、タイリングを描く(B4程度の広さ)。

- ・図3のタイルと Substitution rule を用いて得られる chair タイリングが周期的でない理由を考える。

方眼が印刷された B4 サイズの紙に、フリーハンドで Substitution rule

を用いて chair タイリングを描く。描いたらタイルの方向で色を変えて色を塗る。時間が許せば、

Substitution rule を使わずに描くことも試してもらって、Substitution rule が効率の良いやり方であることを確認してもらう。

前者の取り組みは、平面全体にタイルをすき間なく敷き詰めるといふタイリングの構成を実感してもらうためである。可能ならば、未解決問題である「単一でタイリングができる五角形はどのくらいあるか？」にも言及する。

後者の取り組みは、Substitution rule が効率の良いやり方であることを実感してもらうためと、色塗りをする中で、構成されるタイリングには、ずらせない(平行移動できない)方向があることを見てもらうためである。図4の chair タイリングの一部には色を塗られたタイルがあるが、chair タイリングの全体像を想像してもらうと、それは右上、左下の両方向に無限に伸びる。また、この場所にだけ現れることが想像できる。そのため、その伸びている方向以外にはずらすこと(平行移動)ができないことが分かる。

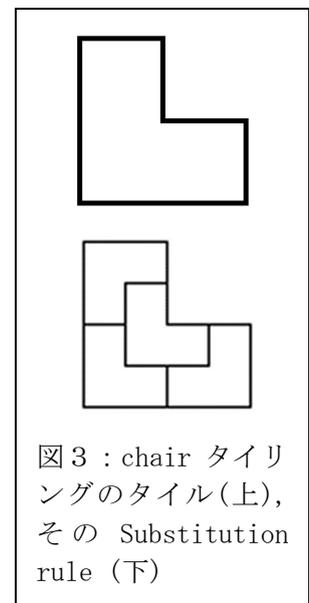


図3 : chair タイリングのタイル(上), その Substitution rule (下)

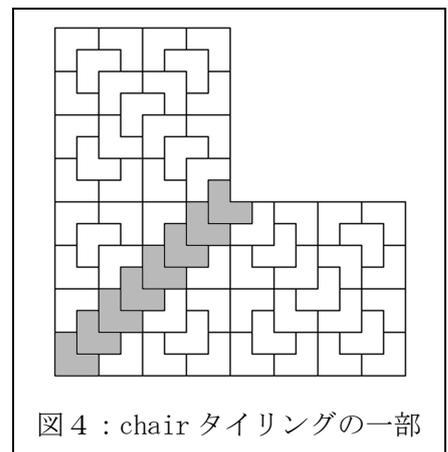


図4 : chair タイリングの一部

また、授業ではタイリングをモチーフとした芸術家エッシャーの作品や中世イスラム建築の装飾といった話題にも触れている。内容を手直して、見合った指導方法をとることで、高校のみならず、小学校、中学校での総合的な学習の時間にも活用できる教材であると考えている。

この授業では期末レポートを課しているが、レポートの内容は自分が製作したものとその説明である。タイリングを扱ったレポートで、今までで一番の大作は芸術を専攻する学生のもので、セラミックで Penrose タイリングのタイルを焼いてタイリングを作ったというものだった。重すぎて実物の提出をしてもらうのは不可能だった。

「幾何学特論 I」は課題探究・問題解決型の授業として実施されており、10年以上担当している。手を動かして実物を作るという「体験する数学」と同様の活動を経て、さらに、自ら問題を設定し、それを研究してゆくというスタイルを取っている。その問題を見つけるためのテーマのひとつとしてタイリングを挙げてきた。この授業でタイリングを研究し、そのまま卒業研究として続け、さらには後輩に引き継ぐことで、3年間に渡って同じテーマで研究が続けられたことがあった。その研究内容を含む形で、さらに結果を加えて、集大成したものが参考文献[2]である。共著者には「幾何学特論 I」の受講生で、卒業研究のゼミ生だった方々の名前が連なっている。また、その中のひとりが高知大学大学院博士課程後期に進学し、タイリングのテーマで、博士の学位を取得した。

また、この課題探究・問題解決型の授業には学生による授業評価アンケートを行うことが課せられている。5段階評価で全項目の平均4以上をキープしている。

小松は現在も「体験する数学」と「幾何学特論 I」を担当しているが、受講生の意欲の低下や学力のばらつきといった越えなければならない課題が多くあり、授業の質を維持していくためには、さらなる教材やその指導方法の改良は必要であると考えている。

3. 高等学校での理数科の科目「課題研究」における活用

平成21年12月の高等学校学習指導要領解説数学編理数編において、課題研究は、「生徒自らが科学や数学に関する課題を設定し、その課題の解決を図るために個人又はグループで研究を行い、専門的な知識と技能を関連付け、その深化、総合化を図るとともに、問題解決の能力や自発的、創造的な学習態度を育てるという点に特色をもつ科目」と述べられている。

このような特色をもつ課題研究において、数学を選択した殆どの生徒がそのテーマの設定に悩み、そして自らが決めたテーマに沿って研究を進めている。しかしながら、主体性をもって数学の専門的な知識と技能を関連付けるまでの研究に至っているとは思えない。さらに、その単位数内で研究を進められず、放課後等を利用して行う場合もある。

こうした実態にある数学における課題研究のテーマを、その科目の特色を満たすような年間学習指導計画(以下年計という)のある教材で設定したい。そこで、教材は5, 7, 8回対称性をもつ非周期タイリングとして有名な Penrose, Danzer, Ammann-Beenker タイリングから得ることとする。得られた各教材のテーマが次の(3-1)である。

- (3-1) テーマ「5回対称性をもつ Penrose タイリングの構成法とその性質について」
- テーマ「7回対称性をもつ Danzer タイリングの構成法とその性質について」
- テーマ「8回対称性をもつ Ammann-Beenker タイリングの構成法とその性質について」

これらは、高等学校学習指導要領では扱わない、数学の専門的な知識を指導することができるような教材である。(3-1)に記した各テーマは、数学I, Aの集合、または数学Bの数列を用いて、課題研究が進められるような教材である。よって、その科目の履修を3学年を対象とする場合、生徒は既習の数学を用いて、課題研究における疑問を解決させることができるような教材である。また、既習の数学を用いることができるので、生徒は主体性をもって、創造的な学習態度で問題を解決するであろう。専門的な知識と技能を関連付け、その深化、総合化を図るための年計を作成することで、科目の単位数内で、数学の専門的な知識と技能を関連付けるような研究の内容に仕上げられるであろう。さらに、研究した内容を基にして、自発的にそれを深化、または他の研究への総合化を図るための指導を行えるであろうと考える。

故に、この教材の指導の方法と年計を準備する。

4 課題研究における指導方法と年間学習指導計画

(4-1) 指導方法

課題研究を指導するにあたって、数学 I, A の集合, または数学 B の数列の分野を既習とすることを前提とする。そのため, (4-2) に記す年計は, 3 学年を対象とした 1 単位として作成する。

指導するための導入として, [4] から引用した次の問題を解かせる。

(4-1-1) 問題

さゆりさんは, たたみのしき方について考えています。さゆりさんの地域のたたみの形は長方形で, たたみの長い辺は, 短い辺の 2 倍の長さです。また, たたみのしき方には下の 3 つの約束があります。

- 約束 1 床の間にたたみの長い辺を合わせる。
- 約束 2 出入り口にたたみの長い辺を合わせる。
- 約束 3 たたみの 4 つの角が 1 か所に集まらないようにする。

この問題の正答率が 65.8% ([7]) であった。この結果は, 中学校以来, 所謂, 敷き詰め問題を解いたことがなくても, その過半数が, Matching rule をもつタイリングを理解していることを意味する。この問題を最初に出題することで, 全員がタイリングを研究するためのスタートラインに立てるものと考えられる。

また, 周期タイリングとして, 「任意の三角形は単一でタイリングができる」や「任意の四角形は単一でタイリングができる」というように指導する。その後, 「では, 任意の五角形ではどうなるか」というように問い, グループで討議させるような時間も設ける。Substitution rule を研究させるので, chair タイリングを例にして平面をタイリングすることができることを示させるような時間も設ける。また, 研究の進捗が早いグループに対しては, タイリングにおいてタイルの個数を表す漸化式を作らせる。そして, それが成り立つことを数学的帰納法を用いて示させる。さらに漸化式の一般項を求めさせる。そして, 一般項の比の極限を求めさせる。その値が無理数(例えば Perose タイリングの場合は黄金比)になれば, タイリングが周期的でないことを理解させる。高校生にとって, タイリングが準周期になることを示させることは難しい。それで, 進捗の早いグループについては, [1] 以外の論文の内容から研究させる。例えば, 今回の研究で学んだ回転対称性をもつタイリングの構成法で得られた 5 回対称性をもつ Penrose タイリングと 7 回対称性をもつタイリングの違いについて, [2] の論文をもとにそのような内容も指導する。

それから, 研究を主体性をもって取り組ませなければならないが, 生徒のみではどうしてもそれに行き詰まってしまうと考える。よって, 研究をあるところまで進められれば適宜, 教員の方から課題を与えることにしたい。そして, 研究の進捗を(4-2-2)に記した課題とそのルーブリック評価表と照らし合わせて, 生徒自身でその振り返りを行ってもら(ルーブリック評価表は, 教員が評価する内容を生徒へ知らせるために 4 月のオリエンテーションの際に配布する。生徒自身の評価と教員の評価を比べて, 今後の指導に役立てる)。このような指導を続けていけば, 生徒の方から研究の進め方を提示するようになり, 主体性をもってそれを進めると考える。それに加えて, 単位数内でどこまで研究が進められるかの見通しを, 生徒同士や教員と共有することができる。その状況に応じて, 研究が順調に進められないときもあることを伝えてゆきたい。その一方で, 生徒の実態に応じて, 英語かつ tex でのレポート作りや発表を行わせることにする。発表については, 質疑を生徒や教員から投げかけ, それに応答してもらい練習を行う。

(4-2) 年間学習指導計画

(4-2-1) 課題研究の目標

数学に関する課題を(3-1)の 3 つのテーマから決定し, その課題解決を図る学習を通して, 専門的な知識と技能の進化, 総合化を図るとともに, 問題解決の能力や自発的, 創造的な学習態度を育てる。

(4-2-2) 課題とそのルーブリック評価表

課題

1 学期	2 学期	3 学期
<ul style="list-style-type: none"> ・授業等で意見交換や討論会 ・ポスターの作成 ・発表会 	<ul style="list-style-type: none"> ・授業等で意見交換や討論会 ・論文の作成 ・発表会 	<ul style="list-style-type: none"> ・反省会

ルーブリック評価表

3 学期は授業時数が少ないことを想定している。そのため、知識・理解の観点のみで評価を行う。1 時間の授業で原則、1 つの観点のみで評価を行うが、発表会のときは該当するすべての観点でそれを行う。ただし、その練習の際には1 つの観点で評価を行い、練習ごとにその観点を変更する(注意：点数5には α の文章のみを記している)。

点数 観点	1 (一層努力)	2 (要改善)	3(概ね達成)	4 (達成)	5 (達成+ α)
関心・ 意欲・ 態度	研究に全く関心がない。	教員の指導のもと研究に関心を示す。	研究に殆ど参加する。	研究に毎時参加する。	研究に新たな結果を得ようとする。
	自分の役割を意欲をもって取り組んでいない。	教員の指導のもと自分の役割を意欲をもって取り組もうとする。	自分の役割を概ね意欲をもって取り組んでいる。	自分の役割を意欲をもって取り組んでいる。	自分の役割のみならず全体の研究を積極的に進めることができる。
	毎時私語があり真面目に取り組むことができなかった。	真面目に取り組むことができない授業もあった。	私語が殆どなく授業を真面目に取り組むことができた。	すべての授業を真面目に取り組むことができた。	グループの中でリーダーシップを発揮した。
	普段の授業や討論会で全く発言しなかった。	教員の指導のもと普段の授業や討論会で発言する。	普段の授業や討論会で殆ど発言する。	普段の授業や討論会で毎時発言する。	仲間と討論する場面も見受けられる。
	提出物を全く提出しない。	提出物をすべて提出するが期限内に提出しない。	提出日の時間ぎりぎりに持ってくる。	提出日に余裕をもって提出することができる。	提出日前までに余裕をもって提出することができる。
思考・ 判断・ 表現	定義と命題を書けなかった。	定義と命題を教員に教えてもらった。	定義と命題を考え自身である程度研究内容を表現することができる。	定義と命題を考え自身で研究内容を表現することができる。	発展的な内容も表現することができる。
	誤字脱字が5つ以上ある。	誤字脱字が3つ以上ある。	誤字脱字が1つある。	誤字脱字が全くない。	読みやすい。
	聴衆は発表を理解することができない。	聴衆は内容について理解することが難しいと感じる。	聴衆は発表の内容を概ね理解することができる。	聴衆は発表の内容を理解することができる。	聴衆は発表に魅了されている。
	発表の原稿を用意することができない。	発表では原稿を読んでいる。	発表では頻繁に原稿を見ている。	発表では殆ど原稿を見ない。	発表では全く原稿を見ない。
	発表では相手に伝える意思が感じられない。	発表では相手に伝える意思があまり感じられない。	発表では相手に伝える意思は良好である。	発表では相手に伝える意思は良好で話すスピードも良い。	日本語だけでなく英語でも発表をすることができる。
技能	パッチを作図することができない。	パッチをフリーハンドで作図することができる。	パッチをコンピュータを用いて作図することができる。	パッチをコンピュータを用いて作図し word 等にその図を挿入することができる。	tex 等を使いこなすことができる。

	発表の内容をまとめることができなかつた。	教員の指導のもと発表の内容を数学の用語でまとめることができる。	発表の内容を殆ど数学の用語で伝えることができる。	発表の内容を数学の用語で伝えることができる。	発表の内容を英語でまとめることができる。
知識・理解	発表ではタイリングの構成法を説明することが全くできない。	教員の指導のもと発表ではタイリングの構成法を説明することができる。	発表ではタイリングの構成法を数学の用語で殆ど説明することができる。	発表ではタイリングの構成法を数学の用語で説明することができる。	[2], [3]の内容の一部を理解することができる。
	n 回対称性をもつ非周期タイリングを理解していない。	教員の指導のもと n 回対称性をもつ非周期タイリングを理解している。	n 回対称性をもつ非周期タイリングを概ね理解している。	n 回対称性をもつ非周期タイリングを理解している。	タイルの個数を表す漸化式の比の極限値を求めタイリングの非周期を示すことができる。
	質疑に応答することができない。	質疑の応答になっていないが努力しようとする。	質疑に殆ど応答することができる。	質疑に応答することができる。	英語での質問を理解し、対応しようとするすることができる。
	自分の役割と研究のまとめを述べなかつた(3学期の評価)。	教員の指導のもと自分の役割と研究のまとめを述べることができた(3学期の評価)。	自分の役割と研究のまとめを殆ど述べることができた。研究の課題等も理解しその能力が身についている(3学期の評価)。	自分の役割と研究のまとめを述べることができた。研究の課題等も理解しその能力が十分に身についている(3学期の評価)。	研究の副産物等も得ることができた(3学期の評価)。

(4-2-3) 指導の計画(60分授業の年間30時間)

3年の3学期の授業時数は少ないため、その設定を1時間とした。また、数学の研究グループを10グループ程度を想定している。

学期	月	研究の内容	配当時間
1	4	オリエンテーション, 及び(3-1)からテーマを決定させる	1
		(4-1-1)の問題を考えさせる等, 研究の導入	1
		プロトタイルとその貼り合わせ規則について	1
	5	プロトタイルとその Substitution rule について	2
		回転対称性をもつタイリングについて	1
	6	回転対称性をもつタイリングの構成法について	1
		発表の準備(これまでの内容を定義と命題にまとめる)	1
		発表(質疑応答等も含め1グループ10分程度)	2
	7	パッチについて	2
タイリングにおいてタイルの個数を表す漸化式を求める		2	
2	9	導いた漸化式が成り立つことを証明させる	2
		漸化式の一般項を求める	2
	10	一般項の比の極限を求める	1
		論文の作成	3
	11	発表の準備	2
		発表(質疑応答等も含め1グループ15分程度)	2
	12	発表(残りのグループ)	1
論文の訂正等		2	
3	1	反省会	1

5 今後の課題

(3-1)の各教材の学習指導案を、それぞれ作成する。また、実際の授業を通して、生徒が主体性をもった学習態度で取り組むかを検証しなければならない。

参考文献

- [1] K. Kato, K. Komatsu, F. Nakano, K. Nomakuchi, M. Yamauchi, Remarks on 2-dimensional quasiperiodic tilings with rotational symmetries : Hiroshima Math. J. 38(2008), 385-395
- [2] H. Hayashi, Y. Kawachi, K. Komatsu, A. Konda, M. Kurozoe, F. Nakano, N. Odawara, R. Onda, A. Sugio, and M. Yamauchi, Notes on vertex atlas of Danzer tiling: Nihonkai Math. J. 22(2011), 49-58
- [3] H. Hayashi, K. Komatsu and M. Yamauchi, A note on the construction of non-periodic tilings by attaching wedge-shaped unbounded configurations : Kochi J. Math. 10(2015), 53-60.
- [4] 平成 26 年度「全国学力学習状況調査小学校 第 6 学年 算数 B」
- [5] 文部科学省「高等学校学習指導要領解説数学編理数編」平成 21 年 12 月
- [6] 文部科学省 国立教育政策研究所 教育課程研究センター「評価規準の作成，評価方法等の工夫改善のための参考資料 ～新しい学習指導要領を踏まえた生徒一人一人の学習の確実な定着に向けて～」【高等学校 数学】平成 24 年 7 月
- [7] 平成 26 年度「全国学力・学習状況調査 調査結果のポイント」平成 26 年 8 月 文部科学省 国立教育政策研究所