

## 12 同相写像

【基本事項】  $X, Y$  を位相空間とする.

- 写像  $f: X \rightarrow Y$  が連続な全単射で, その逆写像  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  も連続であるとき,  $f$  を同相写像とよぶ. (連続な全単射というだけでは同相写像とは限らない.)
- $X$  から  $Y$  への同相写像が存在するとき,  $X$  と  $Y$  は同相あるいは位相同型とよび,  $X \approx Y$  と表す.

例 12.1. 集合  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $Y = \{w, x, y, z\}$ ,  $Z = \{1, 2, 3\}$  にそれぞれ位相

$$\mathcal{T}_X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}, X\}$$

$$\mathcal{T}_Y = \{\emptyset, \{w\}, \{x\}, \{w, x\}, Y\}$$

$$\mathcal{T}_Z = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, Z\}$$

が与えられているとする.

- (1) 次で与えられる  $f: Z \rightarrow X$  は単射連続写像ではあるが, 全射でないので同相写像ではない

$$f(1) = a, f(2) = d, f(3) = c$$

- (2) 次で与えられる  $g: X \rightarrow Z$  は全射連続写像ではあるが, 単射でないので同相写像ではない

$$g(a) = 1, g(b) = 2, g(c) = 3, g(d) = 2$$

- (3) 次で与えられる  $h: Y \rightarrow X$  は全単射ではあるが連続でないので同相写像ではない. ちなみに  $h^{-1}$  は連続になっている.

$$h(w) = a, h(x) = b, h(y) = c, h(z) = d$$

- (4) 次で与えられる  $p: X \rightarrow Y$  は全単射連続写像ではあるが, 逆写像  $p^{-1}$  が連続でないので同相写像ではない

$$p(a) = x, p(b) = w, p(c) = z, p(d) = y$$

- (5) 次で与えられる  $q: X \rightarrow X$  は全単射連続写像で, さらに逆写像  $q^{-1}$  も連続なので同相写像である.

$$q(a) = b, q(b) = a, q(c) = d, q(d) = c$$

例 12.2. 次の  $\mathbf{R}^1$  の 2 つの部分空間は同相である.

- (1)  $(a, b)$  と  $(c, d)$ ,  $[a, b]$  と  $[c, d]$ ,  $[a, b)$  と  $[c, d)$ . ただし  $a < b, c < d$  とする
- (2)  $[a, b)$  と  $(c, d]$ . ただし  $a < b, c < d$  とする
- (3)  $(a, b)$  と  $(c, \infty)$ ,  $[a, b)$  と  $[c, \infty)$ . ただし  $a < b$  とする

例 12.3. 次のそれぞれは同相である. ただし,  $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$  は  $n$  次元球面である.

- (1)  $\mathbf{R}^2$  における任意の 2 つの多角形.
- (2)  $\mathbf{R}^2$  における任意の多角形と  $S^1$ .
- (3)  $S^n$  から 1 点  $p = (0, \dots, 0, 1)$  を除いた空間  $S^n - \{p\}$  と  $\mathbf{R}^n$ .
- (4)  $\mathbf{R}^n$  における開円板  $D = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$  と  $\mathbf{R}^n$ .