

## 8 閉包, 開核

【基本事項】  $X$  を位相空間とし,  $A$  をその部分集合とする.

- $A$  を含む閉集合全体の共通部分を  $A$  の閉包とよび  $\bar{A}$  で表す.  $A$  に含まれる開集合全体の和集合を  $A$  の開核とよび  $\text{Int } A$  で表す.  $\text{Int } A$  に含まれる点を,  $A$  の内点とよび,  $X - A$  の内点, すなわち  $\text{Int}(X - A)$  に含まれる点を,  $A$  の外点とよぶ. 内点でも外点でもない点を  $A$  の境界点とよび, 境界点の集合を  $A$  の境界とよび  $\partial A$  で表す.
- $\bar{A} = X$  となるとき,  $A$  は  $X$  で稠密であるという.

注意 8.1.  $A$  の閉包  $\bar{A}$  は  $A$  を含む最小の閉集合である. すなわち, 次の性質が閉包を特徴づけている:

$\bar{A}$  は  $A \subset \bar{A}$  を満たす閉集合で,  $A \subset F$  を満たす任意の閉集合  $F$  に対して  $\bar{A} \subset F$  が成り立つ.

同様に,  $A$  の開核  $\text{Int } A$  は  $A$  に含まれる最大の開集合である. すなわち, 次の性質が開核を特徴づけている:

$\text{Int } A$  は  $\text{Int } A \subset A$  を満たす開集合で,  $G \subset A$  を満たす任意の開集合  $G$  に対して  $G \subset \text{Int } A$  が成り立つ.

例 8.2. 1次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}$  において次が成り立つ,

$$\begin{aligned}\overline{(a, b)} &= \overline{[a, b]} = \overline{(a, b]} = \overline{[a, b)} = [a, b] \\ \text{Int } (a, b) &= \text{Int } [a, b] = \text{Int } (a, b] = \text{Int } [a, b) = (a, b) \\ \overline{\mathbf{Z}} &= \mathbf{Z}, \quad \text{Int } \mathbf{Z} = \emptyset, \quad \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}, \quad \text{Int } \mathbf{Q} = \emptyset\end{aligned}$$

## 9 まとめ

$X$  を位相空間とする.

[O]  $X$  の開集合に対して次が成り立つ.

- [O<sub>1</sub>]  $X$  および  $\emptyset$  は開集合である.
- [O<sub>2</sub>]  $U_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) がすべて開集合なら,  $\bigcap_{i=1}^n U_i$  も開集合である.
- [O<sub>3</sub>]  $U_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) がすべて開集合なら,  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  も開集合である.

[C]  $X$  の閉集合に対して次が成り立つ.

- [C<sub>1</sub>]  $X$  および  $\emptyset$  は閉集合である.
- [C<sub>2</sub>]  $F_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) がすべて閉集合なら,  $\bigcup_{i=1}^n F_i$  も閉集合である.
- [C<sub>3</sub>]  $F_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) がすべて閉集合なら,  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$  も閉集合である.

[K]  $X$  の各部分集合  $A$  に対し, その閉包  $\bar{A}$  を対応させる対応について次が成り立つ.

[K<sub>1</sub>]  $\bar{\emptyset} = \emptyset$

$$[\mathbf{K}_2] \quad A \subset \bar{A}$$

$$[\mathbf{K}_3] \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$[\mathbf{K}_4] \quad \bar{\bar{A}} = A$$

[I]  $X$  の各部分集合  $A$  に対し, その開核  $\text{Int } A$  を対応させる対応について次が成り立つ.

$$[\mathbf{I}_1] \quad \text{Int } X = X$$

$$[\mathbf{I}_2] \quad \text{Int } A \subset A$$

$$[\mathbf{I}_3] \quad \text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$$

$$[\mathbf{I}_4] \quad \text{Int}(\text{Int } A) = \text{Int } A$$

【説明】 集合  $X$  に位相が与えられると, それを用いて, 開集合, 閉包, 開核といったものが定まる.

一方で, 位相がまだ与えられていない集合  $X$  に, その部分集合が閉集合かどうかを定め, それが  $[\mathbf{C}_1]$ – $[\mathbf{C}_3]$  を満たすようにできれば, そこから  $X - G$  が閉集合であるとき  $G$  が開集合であると定義でき, それが  $[\mathbf{O}_1]$ – $[\mathbf{O}_3]$  を満たす. つまり, 最初に閉集合族を定義し, 開集合は閉集合の補集合として定義してやっても位相が定まる.

さらには,  $[\mathbf{K}_1]$ – $[\mathbf{K}_4]$  を満たす操作が与えられれば,  $\bar{F} = F$  を満たすような  $X$  の部分集合  $F$  を閉集合であると定義してやると,  $[\mathbf{C}_1]$ – $[\mathbf{C}_3]$  が成り立ち, それにより,  $X$  に位相が定まる.

同様に,  $[\mathbf{I}_1]$ – $[\mathbf{I}_4]$  を満たす操作が与えられれば,  $\text{Int } G = G$  を満たすような  $X$  の部分集合  $G$  を開集合であると定義してやると,  $[\mathbf{O}_1]$ – $[\mathbf{O}_3]$  が成り立ち, それにより,  $X$  に位相が定まる.

そして, 上の4種類はすべて同値になるのである. つまり, 位相とは上のいずれかの性質を満たす部分集合族, あるいは操作を与えることにより決まるのである.