

6 相対位相, 部分空間

【基本事項】 X を位相 \mathcal{T} をもつ位相空間とし, A を X の空でない部分集合とする. A の部分集合の族

$$\mathcal{T}_A = \{G \cap A \mid G \in \mathcal{T}\}$$

は A の位相となる. これを A の X に関する**相対位相**といい, 相対位相をもつ位相空間 A を X の**部分位相空間** (あるいは単に**部分空間**) という.

例 6.1. 1次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^1 の部分空間 $A = [0, 2)$ を考える. $B_1 = [0, 1)$, $B_2 = [1, 2)$ とする.

- (1) B_1, B_2 は共に \mathbf{R}^1 の開集合でも閉集合でもない.
- (2) B_1 は A の開集合であるが閉集合でない.
- (3) B_2 は A の閉集合であるが開集合でない.

例 6.2. 離散空間の任意の部分空間は離散空間である. また, 密着空間の任意の部分空間は密着空間である.

7 集積点, 孤立点

【基本事項】 X を位相空間とし, A をその部分集合とする.

- X の点 p が A の**集積点**であるとは, p を含む任意の開集合 G に対して $G \cap (A - \{p\}) \neq \emptyset$ が成り立つときをいう. A のすべての集積点の集合を A の**導集合**といい, $D(A)$ で表す.
- A の点 p が A の**孤立点**であるとは, $G \cap (A - \{p\}) = \emptyset$ すなわち $G \cap A = \{p\}$ が成り立つような p を含む X の開集合 G が存在するときをいう. つまり, 孤立点とは集積点ではない A の点のことをいう. 孤立点だけから成る集合を A の**孤立集合**という.
- A の集積点は必ずしも A の点ではないが, A の孤立点は A の点であることに注意する.

例 7.1. 1次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^1 において,

- (1) $A = [0, 1)$ の集積点とは $0 \leq x \leq 1$ を満たす実数 x である. よって $D(A) = [0, 1]$ となる. また孤立点は存在しない.
- (2) 任意の実数が有理数全体の集合 \mathbf{Q} の集積点になる. よって $D(\mathbf{Q}) = \mathbf{R}^1$ となる. また孤立点は存在しない.
- (3) 整数の集合 \mathbf{Z} の集積点は存在しない. よって $D(\mathbf{Z}) = \emptyset$ となる. また, 任意の整数が \mathbf{Z} の孤立点なので, \mathbf{Z} の孤立集合は \mathbf{Z} 自身である.