

## 4 距離空間に関するまとめと位相空間へのステップについて

以下に、距離と距離空間に関する重要事項をまとめる。

**距離について** 空でない任意の集合に対し、距離が定義できる。

**距離の定義** 集合  $X$  上の距離とは、写像  $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  で教科書の距離の公理  $[M_1]$ - $[M_4]$  を満たすものをいう。特に、 $[M_1]$ - $[M_4]$  を満たす写像  $d$  はなんでも距離なので、 $X$  上の距離は一通りではないことに注意する。何らかの距離が与えられた集合を、距離空間と呼ぶ。

**ユークリッドの距離** 集合  $\mathbf{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}\}$  にはユークリッドの距離と呼ばれる特別の距離が定義される。この距離が与えられたときの  $\mathbf{R}^n$  を  $n$  次元ユークリッド距離空間と呼ぶ。

**距離空間の開集合** 一般に、距離空間  $X$  が与えられたとき、 $X$  の開集合と呼ばれる部分集合たちが決まる。そして、 $X$  の開集合たちに対して定理 5.2 の性質が成り立つ。この性質は、位相空間へのステップになっている。

## 5 位相空間

**【基本事項】** 空でない集合  $X$  の位相とは  $X$  の部分集合の族  $\mathcal{T}$  で次を満たすものをいう。

**[O<sub>1</sub>]**  $X \in \mathcal{T}$  かつ  $\emptyset \in \mathcal{T}$

**[O<sub>2</sub>]**  $U_i \in \mathcal{T} \ (i = 1, \dots, n) \implies \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$

**[O<sub>3</sub>]**  $U_\lambda \in \mathcal{T} \ (\lambda \in \Lambda) \implies \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{T}$

位相が与えられた集合  $X$  を**位相空間**という。また、位相  $\mathcal{T}$  の要素を  $X$  の**開集合**という。さらに  $X$  の部分集合  $F$  が**閉集合**であるとは、その補集合  $X - F$  が開集合のときをいう。

**注意 5.1.** 集合  $X$  の部分集合それぞれに対し、それが開集合であるかそうでないかが決められていて、その決め方が上の **[O<sub>1</sub>]**-**[O<sub>3</sub>]** を満たすとき、すなわち、全体集合  $X$  と空集合  $\emptyset$  が開集合であり、有限個の開集合の共通集合が開集合であり、さらに、任意個の開集合の和集合が開集合になるとき、 $X$  を位相空間とよぶのである。よって、距離と同様に、与えられた集合  $X$  上の位相は一通りではない。

**例 5.2.**  $X$  が距離空間のとき、 $X$  の距離を用いて開集合を定義した。その開集合全体からなる族は位相になることは教科書の定理 5.2 で示した。つまり、定理 5.2 があるので、距離空間に対する開集合の定義の仕方は問題がないことが分かるのである。

**例 5.3.** 1次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^1$  における開集合とは、开区間  $(a, b) = \{x \mid x \in \mathbf{R}^1, a < x < b\}$  の和集合  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda, b_\lambda)$  で表される部分集合である。

**例 5.4.** 空でない集合  $X$  の部分集合全体からなる族は位相になる。この位相を  $X$  の**離散位相**という。

**例 5.5.** 空でない集合  $X$  の部分集合の族  $\{X, \emptyset\}$  は位相になる。この位相を  $X$  の**密着位相**という。

**問 5.6.** 集合  $X = \{a, b\}$  に定めることのできる位相をすべて求めよ。

**問 5.7.** 集合  $X = \{a, b, c\}$  の部分集合の族  $\mathcal{T}' = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, X\}$  は  $X$  の位相になることを示せ。また、この位相空間の開集合をすべて求めよ。