

3 距離空間における近傍と開集合

【基本事項】以下で (X, d) を距離空間とする.

- 正の数 ε と点 $x \in X$ に対し X の部分集合 $U(x; \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ を x の ε 近傍とよぶ.
- X の部分集合 G が開集合であるとは, 任意の $x \in G$ に対し, $U(x; \varepsilon) \subset G$ となる正の数 ε が存在するときをいう. また, X の部分集合 F が閉集合であるとは, $X - F$ が開集合のときをいう.

例 3.1. 1次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^1 において, 点 $a \in \mathbf{R}$ の ε 近傍は开区間 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ である.

また, 任意の开区間 (a, b) は開集合である.

例 3.2. 2次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^2 において, 円の内部 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r\}$ や長方形の内部 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a_1 < x < b_1, a_2 < y < b_2\}$ などは開集合である. さらに, n 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^n においても同様である. ただし, 円や長方形の境界を含んでしまうと開集合ではない.

例 3.3. 離散距離空間では, 任意の部分集合が開集合になる.

例 3.4. 距離空間において開集合の無限個の共通集合は開集合になるとは限らない. たとえば, 1次元ユークリッド空間 \mathbf{R} において, 开区間 $G_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 1 + 1/n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) はすべて開集合であるが, それらの共通集合 $\bigcap_{n \geq 1} G_n$ は開集合にならない.

問 3.5. \mathbf{R}^2 において, 距離 d を次のように定めたときの原点の 1 近傍はどのようなになるか.

(1) ユークリッド距離

$$(2) d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

$$(3) d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

(4) 離散距離