5　集合の濃度

【基本事項】

(1) 集合 X と Y が**対等**であるとは，全単射 $X \to Y$ が存在するときをいう．

(2) 集合 X が**有限集合**であるとは，X は空集合であるか，または適当な自然数 n が存在して，X と $\{1, 2, \dots, n\}$ が対等であるときをいう．

(3) 有限集合 X の**濃度** $|X|$ を次のように定める．まず，X が空集合と対等なときは $|X| = 0$ とする．一方，X が $\{1, 2, \dots, n\}$ と対等なときは $|X| = n$ とする．

(4) 有限でない集合を**無限集合**という．無限集合の濃度を**無限濃度**とよぶ．

例 5.1. 正の偶数の集合 $E = \{2, 4, 6, \dots\}$ および正の奇数の集合 $O = \{1, 3, 5, \dots\}$ はいずれも自然数（正の整数）の集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ と同等である．実際，全単射 $f\colon \mathbb{N} \to E$, $g\colon \mathbb{N} \to O$ が $f(i) = 2i$, $g(i) = 2i - 1$ $(i \in \mathbb{N})$ で与えられる．

例 5.2. 整数の集合 $\mathbb{Z}$ は自然数の集合 $\mathbb{N}$ と対等である．実際，全単射 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ が

$$f(n) = \begin{cases} i & (n = 2i + 1 \text{ のとき}) \\ -i & (n = 2i \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えらえる．

例 5.3. 有理数の集合 $\mathbb{Q}$ は自然数の集合 $\mathbb{N}$ と対等である．しかし，実数の集合 $\mathbb{R}$ は $\mathbb{N}$ と対等ではない．同様に，無理数の集合も $\mathbb{N}$ と対等ではない．

定理. 対等という関係について次が成り立つ．

(1) 任意の集合 X に対し，X と X は対等である．

(2) X が Y と対等なら，Y は X と対等である．

(3) X と Y が対等で，Y と Z が対等なら，X と Z は対等である．

例 5.4. 有限集合 X, Y が対等である必要十分条件は $|X| = |Y|$ となることである．

例 5.5. 有限集合は，その任意の真部分集合とは対等にならない．一方，無限集合は，それと対等になる真部分集合を持つ．無限集合では，自らの一部分と対等になるということが起こるのだ！

例 5.6. すべての無限集合が $\mathbb{N}$ と対等になるわけではない．$\mathbb{N}$ と対等になる無限集合を**可算集合**とよぶ．可算集合は，無限集合の中で最も小さい集合である．