3　同値関係

3.1　演習問題

問 3.1. 任意の整数 x, y に対し，$y \leq x$ のとき $x \sim y$ と定義すると，これは整数の集合 $\mathbb{Z}$ における同値関係になるか．同値関係になるならそれを証明し，ならないなら，どの条件が満たされないかを具体的な例を挙げて答えよ．

問 3.2. 任意の整数 x, y に対し，$x - y$ が 2 の倍数または 3 の倍数のとき $x \sim y$ と定義すると，これは整数の集合 $\mathbb{Z}$ における同値関係になるか．同値関係になるならそれを証明し，ならないなら，どの条件が満たされないかを具体的な例を挙げて答えよ．

問 3.3. 座標平面の 2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ に対し，$x_1 = x_2$ または $y_1 = y_2$ のとき $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ と定義すると，これは座標平面上の点の集合 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ における同値関係になるか．同値関係になるならそれを証明し，ならないなら，どの条件が満たされないかを具体的な例を挙げて答えよ．

問 3.4. 座標平面の 2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ に対し，$x_1 - x_2$ が偶数であり，さらに $y_1 - y_2$ が 3 の倍数のとき $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ と定義すると，これは座標平面上の点の集合 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ における同値関係になるか．同値関係になるならそれを証明し，ならないなら，どの条件が満たされないかを具体的な例を挙げて答えよ．

問 3.5. 集合 X は 2 点以上を含むとする．このとき X の空でない部分集合 A, B に対し，$A \cap B \neq \emptyset$ のとき $A \sim B$ と定義すると，これは X の空でない部分集合全体の集合（すなわち $\mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}$）における同値関係になるか．同値関係になるならそれを証明し，ならないなら，どの条件が満たされないかを具体的な例を挙げて答えよ．

問 3.6. 空でない集合 X の部分集合 A, B に対し，A から B への全単射 $A \to B$ が存在するとき $A \sim B$ と定義すると，これは X のべき集合 $\mathcal{P}(X)$ における同値関係になることを示せ．また，$X = \{1, 2, 3\}$ のとき，$\mathcal{P}(X)$ の同値類をすべてあげよ．

問 3.7. 任意の実数 x, y に対し，$x^2 - y^2 \in \mathbb{Z}$ のとき $x \sim y$ と定義すると，これは実数の集合 $\mathbb{R}$ における同値関係になるか．同値関係になるならそれを証明し，ならないなら，どの条件が満たされないかを具体的な例を挙げて答えよ．

問 3.8. 集合 Y に同値関係 $\sim$ が与えられているとする．いま，写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとき，X において $x \sim_f y$ とは $f(x) \sim f(y)$ のときとして定義される関係 $\sim_f$ を考えると，これは同値関係になるか．同値関係になるならそれを証明し，ならないなら，どの条件が満たされないかを具体的な例を挙げて答えよ．

解答 3.1. 同値関係にならない．実際，$1 \sim 2$ であるが，$2 \sim 1$ は成り立たないので対象律を満たさない．

解答 3.2. 同値関係にならない．実際，$5 - 3 = 2$ は 2 の倍数なので $5 \sim 3$ である．また $3 - 0 = 3$ は 3 の倍数なので $3 \sim 0$ である．しかし $5 - 0 = 5$ は 2 の倍数でも 3 の倍数でもないので $5 \not\sim 0$ であり，推移律を満たさない

解答 3.3. 同値関係にならない．実際，$(0,0) \sim (0,1)$ かつ $(0,1) \sim (1,2)$ であるが，$(0,0) \sim (1,2)$ は成り立たないので推移律を満たさない．

解答 3.4. 同値関係になる．実際，任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$x - x = 0$ は偶数であり，$y - y = 0$ は 3 の倍数なので，$(x,y) \sim (x,y)$ となる．次に，$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2)$ とすると，$x_1 - x_2 = 2n$, $y_1 - y_2 = 3m$ $(n,m \in \mathbb{Z})$ とかける．よって，$x_2 - x_1 = 2(-n)$, $y_2 - y_1 = 3(-m)$ $(-n,-m \in \mathbb{Z})$ なので，$(x_2,y_2) \sim (x_1,y_1)$ である．最後に，$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2)$ かつ $(x_2,y_2) \sim (x_3,y_3)$ とすると，$x_1 - x_2 = 2n_1$, $y_1 - y_2 = 3m_1$ かつ $x_2 - x_3 = 2n_2$, $y_2 - y_3 = 3m_2$ $(n_1,n_2,m_1,m_2 \in \mathbb{Z})$ とかけるので，$x_1 - x_3 = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) = 2(n_1 + n_2)$, $y_1 - y_3 = (y_1 - y_2) + (y_2 - y_3) = 2(m_1 + m_2)$ $(n_1 + n_2, m_1 + m_2 \in \mathbb{Z})$ となり，$(x_1,y_1) \sim (x_3,y_3)$ となる．

解答 3.5. 同値関係にならない．実際，X の異なる 2 点 a, b を考え，$A = \{a\}$, $B = \{a,b\}$, $C = \{b\}$ おくと，$A \cap B = \{a\} \neq \emptyset$ なので，$A \sim B$ である．また，$B \cap C = \{b\} \neq \emptyset$ なので，$B \sim C$ である．ところが，$A \cap C = \emptyset$ すなわち $A \not\sim C$ となり，推移律が満たされない．

解答 3.6. 任意の $A \subset X$ に対し，A の恒等写像 $1_A \colon A \to A$ は全単射なので，$A \sim A$ である．次に $A \sim B$ とすると，全単射 $f \colon A \to B$ が存在する．ここで，f の逆写像 $f^{-1} \colon B \to A$ は全単射なので，$B \sim A$ となる．最後に，$A \sim B$ かつ $B \sim C$ とする．このとき全単射 $f \colon A \to B$, $g \colon B \to C$ が存在するが，合成写像 $g \circ f \colon A \to C$ は全単射になるので，$A \sim C$ となる．以上で，$\sim$ は $\mathcal{P}(X)$ の同値関係になる．次に，$X = \{1,2,3\}$ とする．ここで $A \sim B$ とは A と B の要素の数が同じことであるので，$\mathcal{P}(X)$ の同値類は次の 4 種類になる：$\{\emptyset\}$, $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$, $\{X\}$

解答 3.7. 同値関係になる．実際，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，$x^2 - x^2 = 0 \in \mathbb{Z}$ より $x \sim x$ となる．次に，$x \sim y$ とすると，定義より $x^2 - y^2 \in \mathbb{Z}$ である．よって，$y^2 - x^2 \in \mathbb{Z}$ となり，$y \sim x$ となる．最後に，$x \sim y$, $y \sim z$ とすると，定義より $x^2 - y^2 \in \mathbb{Z}$, $y^2 - z^2 \in \mathbb{Z}$ である．ここで $x^2 - z^2 = (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) \in \mathbb{Z}$ なので $x \sim z$ となる．

解答 3.8. 同値関係になる．実際，$x \in X$ に対し $f(x) \sim f(x)$ なので $x \sim_f x$ である．次に $x \sim_f y$ とすると，定義より $f(x) \sim f(y)$ である．ここで $\sim$ は Y における同値関係なので $f(y) \sim f(x)$ が成り立ち，よって $y \sim_f x$ である．最後に，$x \sim_f y$, $y \sim_f z$ とすると，定義より $f(x) \sim f(y)$, $f(y) \sim f(z)$ である．ここで $\sim$ は Y における同値関係なので $f(x) \sim f(z)$ が成り立ち，よって $x \sim_f z$ である．