

「論理と集合」演習問題

逸見豊

1 集合

1.1 演習問題

集合の表し方として、 $\{1, 2, 3\}$ のように要素を並べて表す方法と、 $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$ のように要素が満たすべき条件を与えて表す方法の 2 種類ある。前者を**外延的方法**と呼び、後者を**内包的方法**と呼ぶ。

用いる記号を準備する

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ でそれぞれ、自然数の集合、整数の集合、有理数の集合、実数の集合を表すとする。ただし、自然数とは正の整数を意味する。
- 集合 A に対し、そのべき集合を $\mathcal{P}(A)$ で表す。

問 1.1. 次の集合を外延的方法で表せ。

- (1) $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x \leq 2\}$
- (2) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x^3 - x = 0\}$
- (3) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, xy = 0 \text{ となる自然数 } y \text{ が存在する}\}$
- (4) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 = -1\}$

問 1.2. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$ に対し、 $A \cup B, A \cap B, A - B$ を求めよ。

問 1.3. 実数の区間 $A = [1, 2], B = (1, 3)$ に対し、 $A \cup B, A \cap B, A - B$ を求めよ。

問 1.4. $A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 10\}, C = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 20\}$ に対し、 $(A \cap B) - C$ を求めよ。

問 1.5. 実数の区間 $A = [6, 12)$ に対し、 $B = \{x \mid 2x \in A\}, C = \{x \mid 3x \in A\}$ とおく。 $B \cup C, B \cap C, B - C$ を求めよ。

問 1.6. 集合 $A = \{2, 3, 4\}, B = \{4, 6, 8\}, C = \{3, 4, 5, 6\}$ に対し、次の集合を求めよ。

- (1) $\{xy \mid x \in A, y \in B\}$
- (2) $\{x^2 \mid x \in A\} \cap \{2y \mid y \in B\}$
- (3) $\{x \mid x \in C, \text{ 任意の } y \in A \text{ に対し } xy \notin B\}$

問 1.7. 4 の倍数の集合は偶数の集合の部分集合であることを示せ。

問 1.8. A を正の奇数全体の集合とし, B を 4 の倍数である正の整数全体の集合とする. このとき集合 $C = \{x \mid x = 2y + 2, y \in A\}$ は B と一致することを示せ.

問 1.9. 任意の集合 A, B, C に対し次が成り立つことを示せ.

$$(1) A \cup B \subset A \cup C \Leftrightarrow B - A \subset C - A$$

$$(2) A \cap B \subset A \cap C \Leftrightarrow A - C \subset A - B$$

問 1.10. 集合 $A = \{a, b, c\}$ のべき集合 $\mathcal{P}(A)$ を求めよ.

問 1.11. 空集合 \emptyset のべき集合 $\mathcal{P}(\emptyset)$ のべき集合 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$, 及びそのべき集合 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ を求めよ.

問 1.12. 集合 $A = \{1, 2\}$ に対し $B = \{x \mid x \in \mathcal{P}(A), 1 \in x\}$ と置くと, B および B のべき集合 $\mathcal{P}(B)$ を求めよ.

問 1.13. $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$ とした時 $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B), \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ および $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$ を求めよ.

問 1.14. 集合 A, B, C に対し, $A \in \mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)$ である必要十分条件は $A \subset B \cap C$ であることを示せ.

問 1.15. 変数 x を含む命題 $P(x)$ を「 x は負でない整数である」とし, $Q(x)$ を「 $xy < 1$ を満たす正の整数 y が存在する」とする. このとき集合 $A = \{x \mid P(x) \wedge Q(x)\}$ はどのようなになるか. また $B = \{x^2 - 3 \mid P(x) \wedge Q(x)\}$ はどのようなになるか.

問 1.16. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}$ のとき, $A \times B$ を求めよ.

問 1.17. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{x \mid 0 < x < 10\}$ のとき, $C = \{x \mid (x, x^2 + 3) \in A \times B\}$ を求めよ.

問 1.18. $A = \mathcal{P}(\emptyset)$ とした時 $A \times \mathcal{P}(A)$ を求めよ. また, $B = \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times \mathcal{P}(A), x \in y\}$ を求めよ.

1.2 略解

解答 1.1. (1) $\{-1, 0, 1, 2\}$ (2) $\{-1, 0, 1\}$ (3) $\{0\}$ (4) $\{\}$ または \emptyset

解答 1.2. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, A \cap B = \{2, 3\}, A - B = \{1\}$

解答 1.3. $A \cup B = [1, 3], A \cap B = (1, 2], A - B = \{1\}$

解答 1.4. $A \cap B = \{2, 4, 6, 8\}$ なので $(A \cap B) - C = \{2, 4\}$

解答 1.5. $B = [3, 6), C = [2, 4)$ なので, $B \cup C = [2, 6), B \cap C = [3, 4), B - C = [4, 6)$

解答 1.6. (1) $\{8, 12, 16, 18, 24, 32\}$ (2) $\{16\}$ (3) $\{5, 6\}$

解答 1.7. A を 4 の倍数の集合とし, B を偶数の集合とする. 定義より, 任意の $x \in A$ は $x = 4n$ ($n \in \mathbb{N}$) と表される. よって, $x = 2(2n)$ であり, $x \in B$ となり, A が B の部分集合であることがわかる.

解答 1.8. $C \subset B$ 及び, $C \supset B$ を示す.

任意の $x \in C$ は $x = 2y + 2$ ($y \in A$) と表すことができる. ここで A の定義より $y = 2n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$) と表されるので, $x = 2y + 2 = 2(2n - 1) + 2 = 4n$ となり, n は正の整数なので, $x \in B$ となり, $C \subset B$ がわかる.

一方, $x \in B$ とすると, $x = 4m$ ($m \in \mathbb{N}$) と表すことができる. よって, $x = 2(2m - 1) + 2$ であり, $2m - 1 \in \mathbb{N}$ なので, $x \in C$ となり. $C \supset B$ がわかる.

以上より $C = B$ となる.

解答 1.9. (1) (\Rightarrow): $x \in B - A$ とすると, $x \in B$ かつ $x \notin A$. $x \in B$ より $x \in A \cup B$. よって, $A \cup B \subset A \cup C$ より $x \in A \cup C$ となり, $x \in A$ または $x \in C$ を得る. ここで $x \notin A$ なので, $x \in C - A$ となり, 以上より $B - A \subset C - A$ を得る.

(2) (\Leftarrow): $x \in A \cup B$ とすると, $x \in A$ または $x \in B$. $x \in A$ ならば $x \in A \cup C$. 一方 $x \notin A$ ならば $x \in B$ より $x \in B - A$. $B - A \subset C - A$ なので $x \in C - A$. 特に $x \in C$ なので $x \in A \cup C$. 以上より $A \cup B \subset A \cup C$ を得る.

解答 1.10. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$.

解答 1.11. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ なので $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. さらに $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

解答 1.12. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\}$ なので, $B = \{\{1\}, A\}$. さらに $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{\{1\}\}, \{A\}, B\}$.

解答 1.13. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$ なので, $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$, $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}\}$, $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$.

解答 1.14. $A \in \mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C) \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(B)$ かつ $A \in \mathcal{P}(C) \Leftrightarrow A \subset B$ かつ $A \subset C \Leftrightarrow A \subset B \cap C$.

解答 1.15. $A = \{0\}$, $B = \{-3\}$

解答 1.16. $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

解答 1.17. $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ かつ $x^2 + 3 \in B$ なので, $C = \{1, 2\}$.

解答 1.18. $A = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ なので, $A \times \mathcal{P}(A) = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{\emptyset\})\}$. $B = \{(\emptyset, \{\emptyset\})\}$.