4.2 同値類と商集合

【基本事項】集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられているとする．このとき，任意の $x \in X$ に対し，x と同値である元全体の集合を x の**同値類**といい $[x]$ で表す：

$$[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

X の同値類全体を要素とする集合を $X/\sim$ で表し，X の $\sim$ による**商集合**とよぶ：

$$X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$$

このとき $x \in X$ に対し $[x] \in X/\sim$ を対応させる写像 $p\colon X \to X/\sim$ が定義される．これを**自然な射影**とよぶ．

例 4.4. 何人かの人々で構成されている集合 X を考えよう．ここで $x, y \in X$ に対し，x からみて y は友達のとき $x \sim y$ と表すことにする．この関係は一般的には同値関係ではないが，非常に幸せなことに，X においては同値関係になっているとする．つまり，誰でも自分は自分の友達（反射律）だし，自分からみて友達だと思っている人は，自分のことも友達だと思ってくれる（対称律）し，友達の友達は友達（推移律）だとする．このとき，任意の $x \in X$ に対し $[x]$ とは x の友達全部の集合を意味する．

問 4.7. 集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられているとき，次の条件はそれぞれ同値であることを示せ．

$$(1)\quad x \sim y \qquad\qquad (2)\quad [x] = [y] \qquad\qquad (3)\quad [x] \cap [y] \neq \emptyset$$

同様に次も同値樽ことを示せ．

$$(1')\quad x \not\sim y \qquad\qquad (2')\quad [x] \neq [y] \qquad\qquad (3')\quad [x] \cap [y] = \emptyset$$

問 4.8. 集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられているとき，自然な射影 $p\colon X \to X/\sim$ は全射であることを示せ．

問 4.9. 問 4.3 における同値関係 $\sim$ について，$0 \in \mathbb{R}$ の同値類 $[0]$ を求めよ．

問 4.10. 問 4.4 における同値関係 $\sim$ について，$0 \in \mathbb{Z}$ の同値類 $[0]$ を求めよ．また $1 \in \mathbb{Z}$ の同値類 $[1]$ を求めよ．

問 4.11. 問 4.5 における X の同値関係 $\sim$ について，$X/\sim$ から Y への写像が，$[x]$ に対し，Y の要素 $f(x)$ を対応させることにより定義できることを示せ．また，この写像を $g\colon X/\sim \to Y$ と表すと，自然な射影 $p\colon X \to X/\sim$ に対し，$g \circ p = f$ が成り立つことを示せ．さらに，g は単射であり，f が全射ならば，g は全単射であることを示せ．

問 4.12. 問 4.6 における X, Y の同値関係について，自然な射影 $p_X\colon X \to X/\sim, p_Y\colon Y \to Y/\simeq$ を用いて定まる写像 $p_X \times p_Y\colon X \times Y \to (X/\sim) \times (Y/\simeq)$ は全射であることを示せ．さらに，$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ に対し，$(x_1, y_1) \equiv (x_2, y_2)$ であることと $(p_X \times p_Y)(x_1, y_1) = (p_X \times p_Y)(x_2, y_2)$ は同値であることを示せ．これにより上の問 4.11 から写像 $(X \times Y)/\equiv \to (X/\sim) \times (Y/\simeq)$ が定義されるが，これは全単射であることを示せ．