

## 4 同値関係と商集合

### 4.1 同値関係

解答 4.1. 推移律が成り立たないので同値関係にはならない. 実際,  $y$  の誕生日は  $x$  の誕生日より 10 日遅く,  $z$  の誕生日は  $y$  の誕生日より 10 日遅いとする,  $z$  の誕生日は  $x$  の誕生日より 20 日遅くなる. (このようにちょうどまい具合な学生  $x, y, z$  はいないかもしれないが, 1 学年 240~270 名いるのだから, 10 日より短くてもこのような状況が生じる 3 人は必ずいるはずだ.)

解答 4.2. 推移律が成り立たないので同値関係にはならない. 実際,  $x > 0, y = 0, z < 0$  のとき,  $xy = yz = 0$  なので,  $x \sim y, y \sim z$  が成り立つが,  $xz < 0$  となるので  $x \sim z$  にはならない.

解答 4.3. 反射律:  $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$  なので,  $x \sim x$ .

対称律:  $x \sim y$  とすると  $x - y$  は整数になるので,  $y - x = -(x - y)$  も整数になり  $y \sim x$  が成り立つ.

推移律:  $x \sim y, y \sim z$  とすると, ある整数  $m, n$  により,  $x - y = m, y - z = n$  となる. よって  $x - z = (x - y) + (y - z) = m + n$  も整数になるので,  $x \sim z$  となる.

解答 4.4. 関係  $\sim$  は同値関係になる.

反射律:  $x - x = 0$  は偶数なので,  $x \sim x$ .

対称律:  $x \sim y$  とすると  $x - y$  は偶数になるので,  $y - x = -(x - y)$  も偶数になり  $y \sim x$  が成り立つ.

推移律:  $x \sim y, y \sim z$  とすると, ある整数  $m, n$  により,  $x - y = 2m, y - z = 2n$  となる. よって  $x - z = (x - y) + (y - z) = 2m + 2n = 2(m + n)$  も偶数になるので,  $x \sim z$  となる.

関係  $\simeq$  は反射律と推移律が成り立たないので同値関係にならない. 実際,  $x - x = 0$  は奇数ではないので  $x \simeq x$  ではない. また,  $x \simeq y, y \simeq z$  のとき  $x - y, y - z$  は奇数なので,  $x - z = (x - y) + (y - z)$  は偶数になってしまい  $x \simeq z$  にはならない.

解答 4.5. 同値関係になる.

反射律: 任意の  $x \in X$  に対し,  $f(x) = f(x)$  なので  $x \sim x$  である.

対称律:  $x \sim y$  とすると,  $f(x) = f(y)$  であり, よって  $f(y) = f(x)$  なので  $y \sim x$  となる.

推移律:  $x \sim y, y \sim z$  とすると,  $f(x) = f(y), f(y) = f(z)$  より  $f(x) = f(z)$  となるので,  $x \sim z$  となる.

解答 4.6. 同値関係になる.

反射律: 任意の  $(x, y) \in X \times Y$  に対し,  $x \sim x$  かつ  $y \simeq y$  なので,  $(x, y) \equiv (x, y)$  である.

対称律:  $(x_1, y_1) \equiv (x_2, y_2)$  とすると,  $x_1 \sim x_2$  かつ  $y_1 \simeq y_2$  である. よって,  $x_2 \sim x_1$  かつ  $y_2 \simeq y_1$  なので  $(x_2, y_2) \equiv (x_1, y_1)$  となる.

推移律:  $(x_1, y_1) \equiv (x_2, y_2), (x_2, y_2) \equiv (x_3, y_3)$  とすると,  $x_1 \sim x_2, x_2 \sim x_3, y_1 \simeq y_2, y_2 \simeq y_3$  なので,  $x_1 \sim x_3, y_1 \simeq y_3$  となるので,  $(x_1, y_1) \equiv (x_3, y_3)$  となる.