3.2　全射，単射，全単射

解答 3.10. 任意の $t \in \{0,1,\dots,n-1\}$ に対し，$m_n(t)=t$ なので，m_n は全射．一方，$m_n(0)=m_n(n)=0$ なので単射でない．m_n の定義域を例えば $\{0,1,\dots,n-1\}$ に制限すると全単射になる．

解答 3.11. 任意の $n \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ に対し，$\min(\{n\})=n$ なので全射になる．一方，$\min(\{n\}) = \min(\{n,n+1\})=n$ なので単射でない．

解答 3.12. 任意の $A \in \mathcal{P}(X)$ に対し，$B=h(A)\in\mathcal{P}(X)$ と置けば，$h(B)=A$ なので全射になる．また，$h(A_1)=h(A_2)$ とすると，$A_1=h(h(A_1))=h(h(A_2))=A_2$ となるので単射である．

解答 3.13. $\tilde{f}$ が全射とする．このとき，任意の $y\in Y$ に対し，$\tilde{f}(A)=\{y\}$ となる $A\in\mathcal{P}(X)$ が存在する．すなわち，A の要素 x を取ると $f(x)=y$ となるので，f は全射である．

逆に，f が全射であるとすると，任意の $B\in\mathcal{P}(Y)$ を考えたとき，B の各要素 y に対し $f(x)=y$ を満たす $x\in X$ が存在するので，B のすべての要素に対し，そのような x を考え，それら全体の集合 $A\in\mathcal{P}(X)$ を考えると，$\tilde{f}(A)=B$ となるので，$\tilde{f}$ は全射である．

次に，$\tilde{f}$ が単射とする．このとき，X の異なる 2 要素 $x_1,x_2\in X$ に対し，$\{x_1\}\neq\{x_2\}$ なので，$\{f(x_1)\}=\tilde{f}(\{x_1\})\neq\tilde{f}(\{x_2\})=\{f(x_2)\}$ となる．これは $f(x_1)\neq f(x_2)$ を意味するので，f は単射である．

逆に，f が単射であるとすると，異なる $A_1,A_2\in\mathcal{P}(X)$ を考えたとき，$A_1\not\subset A_2$ または $A_2\not\subset A_1$ が成り立つ．一般性を失うことなく，$A_1\not\subset A_2$ と仮定できる．すなわち $x\in A_1$ で $x\notin A_2$ なる x が存在する．よって $f(x)\in\tilde{f}(A_1)$ であるが，f は単射だから，$f(x)\notin\tilde{f}(A_2)$ となり，$\tilde{f}(A_1)\neq\tilde{f}(A_2)$ となるので，$\tilde{f}$ は単射である．

解答 3.14. $x\neq y$ とすると $i(x)=\{x\}\neq\{y\}=i(y)$ なので，単射である．しかし，任意の $x\in X$ に対し $i(x)\neq\emptyset\in\mathcal{P}(X)$ なので全射でない．i の終域を $\{\{x\}\mid x\in X\}$ とすれば，明らかに全単射になる．

解答 3.15. 証明略

解答 3.16. 証明略

解答 3.17. いろいろ構成法はあるが，例えば次のようにすればよい．

$f(2n)=2n-1$ $(n\in\mathbb{Z})$ とすると，$f\colon E\to O$ は全単射になる．$g(4n)=g(4n-2)2n-1$, $(n\in\mathbb{Z})$ とすると $g\colon E\to O$ は全射ではあるが単射ではない，$h(2n)=4n-1$ $(n\in\mathbb{Z})$ とすると，$h\colon E\to O$ は単射ではあるが全射ではない，$k(2n)=1$ $(n\in\mathbb{Z})$ とすると，$k\colon E\to O$ は全射でも単射ではない．

解答 3.18. X の要素 x を一つ固定すると，任意の $y\in Y$ に対し，$p_1(x,y)=y$ となるので，射影 $p_1\colon X\times Y\to X$ は全射．$p_2\colon X\times Y\to Y$ も同様．

解答 3.19. (1) $x\in f(A)$ とすると，$x=f(y)$ となる $y\in A$ が存在する．$A\subset B$ より，$y\in B$ なので，$x=f(y)\in f(B)$．よって $f(A)\subset f(B)$ となる．

(2)

$$
\begin{aligned}
x \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow x = f(y) \text{ となる } y \in A \cup B \text{ が存在する} \\
&\Leftrightarrow x = f(y)，\text{ただし } y \in A \text{ または } y \in B \\
&\Leftrightarrow x = f(y) \in f(A) \text{ または } x = f(y) \in f(B) \text{ となる } y \text{ が存在する} \\
&\Leftrightarrow x \in f(A) \cup f(B)
\end{aligned}
$$

以上より $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ となる．

(3) $x \in f(A \cap B)$ とすると，$x = f(y)$ となる $y \in A \cap B$ が存在する．$y \in A$ かつ $y \in B$ なので，$x = f(y) \in f(A) \cap f(B)$ となり，$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ となる．

(4) $x \in f(A) - f(B)$ とすると，$x \in f(A)$ かつ $x \notin f(B)$ である．$x \in f(A)$ より，$x = f(y)$ となる $y \in A$ が存在するが，$x = f(y) \notin f(B)$ なので $y \notin B$ である．よって，$y \in A - B$ であり，$x = f(y) \in f(A - B)$ となり，$f(A - B) \supset f(A) - f(B)$ を得る．

解答 3.20. (3), (4) の等号が成り立たない例：$X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1\}$ とし，$f\colon X \to Y$ を $f(x) = x^2$ とする．ここで $A = \{-1, 0\}$, $B = \{0, 1\}$ とすると，$f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$ であるが，$f(A) \cap f(B) = \{0, 1\} \cap \{0, 1\} = \{0, 1\}$ となり，(3) の等号が成り立たない．さらに $f(A - B) = f(\{-1\}) = \{1\}$, $f(A) - f(B) = \{0, 1\} - \{0, 1\} = \emptyset$ なので，(4) の等号も成り立たない．

次に f が単射なら (3), (4) で等号が成り立つことを示す．

(3) について：$x \in f(A) \cap f(B)$ とすると，$x \in f(A)$ かつ $x \in f(B)$ なので，$x = f(y)$ を満たす $y \in A$ および，$x = f(z)$ を満たす $z \in B$ が存在する．ここで f は単射なので $y = z$ となり，$y \in A \cap B$ なので，$x = f(y) \in f(A \cap B)$ となり，$f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ を得る．$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ と合わせると，$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ となる．

(4) について：$x \in f(A - B)$ とすると，$x = f(y)$ を満たす $y \in A - B$ が存在する．ここで，任意の $z \in B$ に対し，$z \neq y$ なので f が単射であることより $f(z) \neq f(y) = x$. よって，$x \notin f(B)$ となり，$x \in f(A) - f(B)$ である．よって，$f(A - B) \subset f(A) - f(B)$ となり，$f(A - B) \supset f(A) - f(B)$ と合わせると，$f(A - B) = f(A) - f(B)$ となる．