

## 4 同値関係と商集合

### 4.1 同値関係

【基本事項】  $X$  の任意の 2 元  $x, y \in X$  に対し,  $x$  は  $y$  と何らかの関係があるかないかが定まっている状況を考える. ここで,  $x$  が  $y$  と関係があるとき  $x \sim y$  と表し, 関係がないとき  $x \not\sim y$  と表すことにする. このとき, さらに次が成り立つなら, この関係  $\sim$  を集合  $X$  における同値関係とよぶ.

- (1) 任意の  $x \in X$  に対し,  $x \sim x$  (反射律)
- (2)  $x \sim y$  ならば  $y \sim x$  (対象律)
- (3)  $x \sim y$  かつ  $y \sim z$  ならば  $x \sim z$  (推移律)

例 4.1. 任意の集合  $X$  において, 2 つの要素が等しいという関係  $x = y$  は同値関係になる. 一方, 等しくないという関係  $x \neq y$  は同値関係ではない. 実際, 対象律以外は成り立たない.

例 4.2. 実数の集合  $\mathbb{R}$  において, 関係  $x \leq y$  は同値関係ではない. 実際, 対象律が成り立たない.

例 4.3. 理学部の学生  $x, y$  に対し,  $x$  からみて  $y$  が友達るとき  $x \sim y$  と定義したとき, これは理学部の学生全部の集合  $X$  における同値関係にならない. 実際,  $x$  から見て  $y$  は友達でも,  $y$  から見て  $x$  は必ずしも友達とは限らない (悲しい現実!) ので対象律は成り立たない. また, 友達の友達も必ずしも友達ではないので, 推移律も成り立たない. せめて, 反射律 (自分は自分の友達) ぐらいは成り立ってほしいのだが.

問 4.1. 理学部の学生  $x, y$  に対し,  $x$  と  $y$  の誕生日の差が 10 日以内のとき  $x \sim y$  と定義すると, これは理学部の学生全部の集合  $X$  における同値関係になるか.

問 4.2. 任意の実数  $x, y$  に対し,  $xy \geq 0$  のとき  $x \sim y$  と定義すると, これは実数の集合  $\mathbb{R}$  における同値関係になるか.

問 4.3. 任意の実数  $x, y$  に対し,  $x - y \in \mathbb{Z}$  のとき  $x \sim y$  と定義すると, これは実数の集合  $\mathbb{R}$  における同値関係になることを示せ.

問 4.4. 任意の整数  $x, y$  に対し,  $x - y$  が偶数のとき  $x \sim y$  と定義すると, これは整数の集合  $\mathbb{Z}$  における同値関係になるか. また,  $x - y$  が奇数のとき  $x \simeq y$  と定義すると, これは整数の集合  $\mathbb{Z}$  における同値関係になるか.

問 4.5. 集合  $X, Y$  の間の写像  $f: X \rightarrow Y$  が与えられたとき,  $X$  における関係  $\sim$  を  $x_1 \sim x_2$  とは  $f(x_1) = f(x_2)$  であるときと定義する. この関係  $\sim$  は同値関係になるか.

問 4.6. 集合  $X$  における同値関係  $\sim$  および  $Y$  における同値関係  $\simeq$  が与えられているとき, 直積集合  $X \times Y$  における関係  $\equiv$  を  $(x_1, y_1) \equiv (x_2, y_2)$  とは  $x_1 \sim x_2$  かつ  $y_1 \simeq y_2$  であるときと定義する. この関係  $\equiv$  は同値関係になるか.