3.4 逆像

【基本事項】

$f\colon X \to Y$ を写像とする．Y の任意の部分集合 B の f による**逆像**とは X の部分集合

$$\{x \mid x \in X, f(x) \in B\}$$

をいい，$f^{-1}(B)$ で表す．なお，B がただ一つの要素からなる集合の時，すなわち $B = \{y\}$ の時，$f^{-1}(\{y\})$ を $f^{-1}(y)$ と略記する．

問 3.28. $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ とし，写像 $f\colon X \to Y$ が，$f(1) = a$, $f(2) = c$, $f(3) = a$ で与えられているとする．このとき，次の逆像を求めよ．

$$f^{-1}(a), \quad f^{-1}(\{a, b\}), \quad f^{-1}(\{a, c\}), \quad f^{-1}(\emptyset), \quad f^{-1}(Y)$$

問 3.29. 例 3.3 (3) の写像 $m_n\colon \mathbb{Z} \to \{0, 1, \ldots, n-1\}$ に対し，$(m_n)^{-1}(\{0, 1\})$ を求めよ．

問 3.30. $f(x) = \sin(\pi x)$ で定義された写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し，$f^{-1}(0)$ を求めよ．また，$f^{-1}(\{1, -1\})$ を求めよ．

問 3.31. 集合 X に対し，写像 $i\colon X \to \mathcal{P}(X)$ を $i(x) = \{x\}$ とするとき，任意の $A \in \mathcal{P}(X)$ に対し $i^{-1}(A) = A$ を示せ．

問 3.32. A を集合 X の部分集合とし，$i\colon A \to X$ を包含写像とする．このとき，任意の $B \subset X$ に対し $i^{-1}(B) = A \cap B$ であることを示せ．

問 3.33. 写像 $f\colon X \to Y$ および Y の部分集合 A, B に対し，次が成り立つことを証明せよ．

(1) $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

(2) $f^{-1}(A \cup B) = f(A)^{-1} \cup f^{-1}(B)$

(3) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

(4) $f^{-1}(A - B) \supset f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$

(3) において等号が成り立つことが，像についての同様な性質（問 3.19）と異なるところである．

注意 3.17. 写像 $f\colon X \to Y$ に対し，f^{-1} という記号は，f の逆写像の意味でも用いるが，同時に f による Y の部分集合の逆像の意味でも用いており，それらを区別する必要がある．ただし，逆写像 f^{-1} を考えるには，f が全単射であることが必要だが，逆像を考えるには一切の条件はいらない．

問 3.34. $f\colon X \to Y$ は全単射であり，よって逆写像 $f^{-1}\colon Y \to X$ が存在するとする．このとき，Y の任意の部分集合 B に対し，B の f による逆像と，f の逆写像 f^{-1} による B の像は一致することを示せ．