

3.2 全射, 単射, 全単射

【基本事項】 X, Y を集合とし, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

- (1) X の任意の部分集合 A に対し, $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ を f による A の像と呼ぶ.
- (2) $f(X) = Y$ のとき f は全射であるという. 別の言い方をすると, f が全射であるとは, 任意の Y の元 y に対し, $f(x) = y$ となる X の元 x が存在するときをいう.
- (3) X の異なる 2 つの元 x, x' に対し $f(x) \neq f(x')$ であるとき f は単射であるという. 別の言い方をすると, f が単射であるとは, X の任意の元 x, x' に対し $f(x) = f(x')$ であれば $x = x'$ となるときをいう.
- (4) f は全射かつ単射であるとき全単射であるという.

例 3.5. $f(x) = 2x - 3$ で与えられる関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は全単射である.

例 3.6. $f(x) = 2^x$ で与えられる関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は単射であるが, 全射ではない. 実際 $y \leq 0$ の時, $f(x) = y$ となる x は存在しない.

ここで, 正の実数全体の集合を $\mathbb{R}_{>0}$ と書くと, f の像は $\mathbb{R}_{>0}$ となる: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$. そこで, f の終域を $\mathbb{R}_{>0}$ に変えた写像 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ が考えられる: $g(x) = f(x) = 2^x$ ($\forall x \in \mathbb{R}$). この写像 g は全単射になる.

例 3.7. $f(x) = x^3 - x$ で与えられる関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は全射であるが, 単射ではない. 実際, $f(-1) = f(0) = f(1)$ となる. (これ以外にも $f(x) = f(x')$ となるが $x \neq x'$ である x, x' は存在する.)

ここで, $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ または } 1 < x\}$ とすると, f の X への制限 $f|_X: X \rightarrow \mathbb{R}$ は全単射になる.

例 3.8. $f(x) = x^2$ で与えられる関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は全射でも単射でもない.

ここで, 負でない実数全体の集合を $\mathbb{R}_{\geq 0}$ と書くと, f による $\mathbb{R}_{\geq 0}$ の像は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 自身となる: $f(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$. そこで, f の定義域と終域を $\mathbb{R}_{\geq 0}$ に変えた写像 $g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が考えられる: $g(x) = f(x) = x^2$ ($\forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$). この写像 g は全単射になる.

問 3.10. 例 3.3 (3) の写像 m_n は全射であるが単射でないことを示せ. また, m_n の定義域を制限することにより全単射を与えよ.

問 3.11. 例 3.3 (5) の写像 \min は全射であるが単射でないことを示せ.

問 3.12. 例 3.3 (6) の写像 h は全単射であることを示せ.

問 3.13. 例 3.3 (7) の写像 f を任意の集合 X から任意の集合 Y への写像 $f: X \rightarrow Y$ として得られる写像 $\tilde{f}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ を考える. このとき \tilde{f} が全射であることと f が全射であることは同値であり, また, \tilde{f} が単射であることと f が単射であることは同値であることを示せ.

問 3.14. 任意の集合 X に対し, 写像 $i: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ が $i(x) = \{x\}$ で定まる. この写像は単射であるが全射でないことを示せ. また, i の終域を変えることにより全単射を与えよ.

問 3.15. 任意の集合 X に対し, X の恒等写像 $1_X: X \rightarrow X$ は全単射であることを示せ.

例 3.9. A を集合 X の部分集合とする. X の恒等写像 $1_X: X \rightarrow X$ の A への制限 $1_X|_A: A \rightarrow X$ を A の X への包含写像とよぶ.

問 3.16. A が集合 X の部分集合のとき, 包含写像 $i: A \rightarrow X$ は単射であることを示せ.

問 3.17. 偶数全体の集合を E とし奇数全体の集合を O とした時, 全単射 $f: E \rightarrow O$ を構成せよ. また, 全射ではあるが単射ではない写像 $g: E \rightarrow O$, 単射ではあるが全射ではない写像 $h: E \rightarrow O$, 全射でも単射ではない写像 $k: E \rightarrow O$ を構成せよ.

例 3.10. X, Y を任意の集合とする. このとき直積集合 $X \times Y$ から X および Y への写像 $p_1: X \times Y \rightarrow X$ および $p_2: X \times Y \rightarrow Y$ が, それぞれ $p_1(x, y) = x, p_2(x, y) = y$ により定まる. この写像を射影 (第 1 成分への射影, 第 2 成分への射影) とよぶ.

問 3.18. 任意の集合 X, Y に対し, 射影 $p_1: X \times Y \rightarrow X$ および $p_2: X \times Y \rightarrow Y$ は全射であることを示せ.

例 3.11. 写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ と合成写像 $g \circ f: X \rightarrow Z$ に対し, 次が成り立つ.

- (1) f, g がともに全射なら, $g \circ f$ も全射になる.
- (2) f, g がともに単射なら, $g \circ f$ も単射になる.
- (3) $g \circ f$ が全射なら, g も全射になる. (f は全射とは限らない)
- (4) $g \circ f$ が単射なら, f も単射になる. (g は単射とは限らない)

問 3.19. 写像 $f: X \rightarrow Y$ および X の部分集合 A, B に対し, 次が成り立つことを証明せよ.

- (1) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
- (2) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- (3) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
- (4) $f(A - B) \supset f(A) - f(B)$

問 3.20. 上の問の (3), (4) で等号が成り立たない例を一つずつあげよ. また, f が単射であれば, (3), (4) で等号が成り立つことを示せ.