

### 3 写像

#### 3.1 写像

**【基本事項】**

- (1)  $X, Y$  を集合とする.  $X$  の各要素  $x \in X$  に  $Y$  の要素  $y \in Y$  を一つだけ結びつける対応  $x \mapsto y$  を  $X$  から  $Y$  への**写像**とよぶ. 写像は一般的に

$$f: X \rightarrow Y$$

のように表される.  $x$  に結びつけられた  $y$  を  $f(x)$  と書き,  $f$  による  $x$  の**像**と呼ぶ. また  $X$  を写像  $f$  の**定義域**,  $Y$  を  $f$  の**終域**とよぶ.

- (2) 写像  $f: X \rightarrow Y$  と  $g: V \rightarrow W$  が等しいとは  $X = V, Y = W$  であり, さらに任意の  $x \in X$  に対し  $f(x) = g(x)$  であるときをいう.
- (3) 写像  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  が与えられたとき,  $x \in X$  に対し,  $g(f(x)) \in Z$  を対応させる写像を  $f$  と  $g$  の**合成写像**とよび,  $g \circ f: X \rightarrow Z$  で表す:

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

**例 3.1.** 定義域と終域が一致する写像  $f: X \rightarrow X$  で, 特に, 任意の  $x \in X$  に対し  $f(x) = x$  であるようなものを  $X$  の**恒等写像**とよび  $1_X$  (あるいは  $id_X$ ) で表す. すなわち

$$1_X(x) = x \quad (\text{あるいは } id_X(x) = x)$$

である.

**例 3.2.** 写像  $f: X \rightarrow Y$  がすべての  $x \in X$  をある固定された要素  $c \in Y$  に対応させるとき, すなわち

$$f(x) = c$$

が任意の  $x \in X$  に対し成り立つとき,  $f$  を  $c$  への**定値写像**とよぶ.

**例 3.3.** (1) 通常関数とは, 実数の集合から実数の集合への写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  をいう. 例えば  $y = x^2 + 2$  で表される関数とは  $f(x) = x^2 + 2$  で与えられる写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  である.

(2) あるレストランのメニューにある料理の集合を  $X$  とし, 各料理  $x$  に対し  $p(x)$  を  $x$  の値段とすると, 写像  $p: X \rightarrow \mathbb{N}$  が定まる.

(3)  $n$  を正の整数とする. 任意の整数  $x$  に対し,  $m_n(x)$  で  $x$  を  $n$  で割ったあまりと定めると, 写像  $m_n: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  が定まる. 一般に,  $m_n(x)$  を  $x \bmod n$  で表す.

(4) 有限個の要素を持つ集合  $X$  の任意の部分集合  $A$  に対し,  $c(A)$  を  $A$  の要素の数と定めると,  $X$  のべき集合  $\mathcal{P}(X)$  から整数の集合  $\mathbb{Z}$  への写像  $c: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  が定まる.

(5) 任意の自然数の集合  $A$  に対し,  $\min(A)$  を  $A$  の要素の最小値と定めると, 写像  $\min: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$  が定まる.

(6) 与えられた集合  $X$  の任意の部分集合  $A$  に対し,  $h(A)$  を  $A$  の  $X$  における補集合と定めると, 写像  $h: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  が定まる.

(7) 集合  $X$  からそれ自身への写像関数  $f: X \rightarrow X$  が与えられているとき, 写像  $\tilde{f}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  が  $\tilde{f}(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$  で定まる.

問 3.1. 例 3.3 (3) で  $n = 5$  とした時,  $m_5(10), m_5(2), m_5(0), m_5(-3)$  を求めよ.

問 3.2.  $X = \{1, 2, 3\}$  とした時の例 3.3 (4) の写像  $c$  を具体的に求めよ.

問 3.3. 集合  $\{1, 2, 3\}$  の各部分集合  $A$  に対し, 例 3.3 (5) の写像  $\min$  による  $A$  の像  $\min(A)$  を求めよ.

問 3.4.  $X = \{1, 2, 3\}$  とした時の例 3.3 (6) の写像  $h$  を具体的に求めよ.

問 3.5. 関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が  $f(x) = x^2$  で与えられているとき, 集合  $\{-1, 0, 1\}$  の各部分集合  $A$  に対し, 例 3.3 (7) の写像  $\tilde{f}$  による  $A$  の像  $\tilde{f}(A)$  を求めよ.

例 3.4. 写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が  $f(x) = x + 3, g(x) = x^2$  で与えられているとき, 合成写像  $g \circ f$  および  $f \circ g$  は次のようになる.

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9 \\ f \circ g(x) &= f(x^2) = x^2 + 3 \end{aligned}$$

問 3.6. 写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が次で与えられているとき, 合成写像  $g \circ f$  および  $f \circ g$  を求めよ.

(1)  $f(x) = x^3, g(x) = x^2$

(2)  $f(x) = 2^x, g(x) = 3x + 1$

(3)  $f(x) = x^2, g(x) = 3$

問 3.7. 任意の写像  $f: W \rightarrow X, g: X \rightarrow Y, h: Y \rightarrow Z$  に対し,  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$  が成り立つことを示せ.

問 3.8.  $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  とする. 写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow X$  が  $f(x) = |x|$  で定義されているとき,  $f|_X$  は  $X$  における恒等写像  $1_X$  と等しいことを示せ.

問 3.9. 写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(x) = \sin(\pi x)$  で定義する.  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $0$  への定値写像 ( $\forall x, c(x) = 0$ ) とすると,  $f|\mathbb{Z} = c|\mathbb{Z}$  であることを示せ.