注意 2.11. 実数 a, b が与えられたとき，記号 (a, b) は実数直線 $\mathbb{R}$ の開区間として用いられてきたが，一方で，直積集合を定義したことにより $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の要素という意味でも使われることになる．そのため混乱が生じるので，以下では通常は直積集合の要素として用い，開区間として用いるときはそれを明記することにする．

例 2.12. 複数の集合が与えられているとき，添え字の集合を用いて A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ などと表す．Λ が添え字の集合であり，各 A_λ が与えられた集合になる．このとき，すべての A_λ の集まり $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が考えられるが，これを**集合族**と呼ぶ．これは A_λ を要素とする集合と考えてもよいが，時にはそれにより論理的な矛盾が生じることがある（Russell のパラドックス）．そのため，通常は集合と呼ばず集合族と呼ぶ．

例えば $\Lambda = \{1, 2\}$ のときは，$\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} = \{A_1, A_2\}$ である．また，$\Lambda = \mathbb{N}$ の時は，$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ と表すことができる．

ここで注意をすることがある．無限に集合が与えられたとき，常に上のように $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ や $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ と表せるとは限らない．この意味は集合の濃度のところで説明するが，一般に無限のものに順番に $1, 2, 3, \dots$ と番号を付けられるとは限らないのだ．そのため，一般には何らかの無限集合 Λ を添え字集合として，$\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と表すようにする．例えば，任意の実数 x に対し，開区間 $A_x = (x - 1, x + 1)$ を考えると，すべての A_x からなる集合族は $\{A_x\}_{x \in \mathbb{R}}$ と表されるが，これを $\{A_{x_1}, A_{x_2}, A_{x_3}, \dots\}$ のように表すことはできない．

例 2.13. 集合の族 A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が与えられたとき，それらの和集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 及び共通部分 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ を次で定義する：

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \mid \exists \lambda \in \Lambda \text{ s.t. } x \in A_\lambda\}$$
$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \mid \forall \lambda \in \Lambda \text{ に対し } x \in A_\lambda\}$$

注意 2.14. 集合の族 A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ に対し，次が成り立つ：

(1) $x \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda$ に対し $x \notin A_\lambda$

(2) $x \notin \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda$ s.t. $x \notin A_\lambda$

問 2.21. 任意の自然数 n に対し，閉区間 $A_n = [-n, n]$ を考える．$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ を求めよ．

問 2.22. 任意の偶数 $2n$ に対し，開区間 $A_{2n} = (2n - 1, 2n + 1]$, $B_{2n} = (2n - 1, 2n + 1)$ を考える．$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_{2n}$ および $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B_{2n}$ を求めよ．

問 2.23. 任意の自然数 n に対し，開区間 $A_n = \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$ および閉区間 $B_n = \left[-2 + \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right]$ を考える．$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ および $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ を求めよ．

問 2.24. 任意の整数 n に対し，$A_n = \mathbb{R} - \{n\}$ とする．$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ を求めよ．

問 2.25. 任意の自然数 n に対し，開区間 $(-n, n)$, $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ を考え，$A_n = \mathbb{R} - (-n, n)$, $B_n = \mathbb{R} - \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ とおく．$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ および $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ を求めよ．