

「任意」と「存在」に関する論理記号 次の2つの命題を考えよう.

(A) 「任意 x に対し, x^2 は4で割ると1余る」

(E) 「 x^2 を4で割ると1余る x が存在する」あるいは
「 x が存在して, x^2 を4で割ると1余る」

ここで, 「 x^2 を4で割ると1余る」という命題を $P(x)$ とすると, 上の2つも命題はそれぞれ次のような論理記号で表される:

$$(A) \quad \forall x P(x), \quad (E) \quad \exists x P(x)$$

よってそれぞれの否定である「 x が存在して, x^2 を4で割ると1余らない」(または「 x^2 を4で割ると1余らない x が存在する」) および「任意の x に対し, x^2 は4で割ると1余らない」は次のようになる:

$$(A) \text{ の否定} \quad \neg(\forall x P(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg P(x))$$

$$(E) \text{ の否定} \quad \neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg P(x))$$

例えば「任意の x に対し, $xy > 1$ を満たす y が存在する」という命題を考えてみる. これは「任意の x に対し, y が存在して, $xy > 1$ を満たす」と書き換えると, 論理記号により $\forall x \exists y (xy > 1)$ のように表される. よってその否定 $\neg(\forall x \exists y (xy > 1))$ は

$$\exists x \forall y (xy \leq 1)$$

となり, 「 x が存在して, 任意の y に対し, $xy \leq 1$ を満たす」あるいは「任意の y に対し $xy \leq 1$ を満たすような x が存在する」となる.

【基本事項】 2つの集合 A, B に対して, A の元 x と B の元 y の順序を考慮に入れた対 (x, y) すべてからなる集合を A と B の直積とよび $A \times B$ で表す:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

一般に, n を自然数としたとき, n 個の集合 A_1, A_2, \dots, A_n の直積 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ も同様に次で定める

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}$$

例 2.9. $A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}$ のとき, $A \times B$ は次のようになる:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

注意 2.10. $A \times B$ と $B \times A$ は異なることに注意する. また, $(A \times B) \times C$ と $A \times B \times C$ は正確には異なるが, 多くの場合同一視されることがある.

問 2.19. A の要素の数が m で B の要素の数が n のとき, $A \times B$ の要素の数を求めよ.

問 2.20. 任意の集合 A, B, C に対し, 次を示せ.

- (1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
 $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
- (2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
 $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$
- (3) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
 $(B - C) \times A = (B \times A) - (C \times A)$