

2 集合

2.1 集合と要素

【基本事項】

- (1) 範囲が明確に定められた「もの」の集まりを**集合**と呼び、集合 M を構成する「もの」を M の**元**または**要素**とよぶ. x が集合 M の要素である時 x は M に**属する**あるいは M は x を**含む**といい、

$$x \in M \quad \text{あるいは} \quad M \ni x$$

などと表す. また, x が集合 M の要素でないときは, $x \notin M$ あるいは $M \not\ni x$ と表す.

- (2) 要素を全く含まない集合も考えられる. それを**空集合**とよび \emptyset で表す.
- (3) 変数を含む命題というものがある. たとえば「 x は 2 の倍数である」という命題は, 変数 x を含んでいる. この命題は, x が何であるかにより, 真偽が変わってくる. たとえば $x = 12$ のときはこの命題は真になり, $x = 3$ ときは偽になる. このように変数を含む命題を $P(x)$ のような記号であらわす. $P(x)$ が上の例のとき, $P(12)$ は真であるが, $P(3)$ は偽になる. なお, 変数は 1 つとは限らない, x, y と 2 つの変数を含む命題は $Q(x, y)$ のように表される.
- (4) 変数 x を含む命題 $P(x)$ が与えられたとき, $P(x)$ が真であるような x 全体の集合というものが考えられる. これを

$$\{x \mid P(x)\}$$

のように表す. たとえば, $P(x)$ が先ほどの例「 x は 2 の倍数である」とすると, 上の集合は

$$\{x \mid x \text{ は 2 の倍数である} \}$$

となり, 結果として偶数全体の集合が得られる.

- (5) 集合 A の各要素が B の要素である時, すなわち

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

である時, A は B の**部分集合**であるといい, $A \subset B$ または $B \supset A$ と表す. $A \subset B$ かつ $B \subset A$ のとき, A と B は**等しい**といい, $A = B$ で表す. A が B の部分集合であるが, 等しくないとき, A は B の**真部分集合**であるといい, $A \subsetneq B$ または $B \supsetneq A$ と表す. また, A が B の部分集合でないときは $A \not\subset B$ または $B \not\supset A$ と表す.

例 2.1. 次の (1)–(5) は集合であるが, (6), (7) は集合ではない. (5) は (おそらく) 空集合であろう.

- (1) 自然数全体. この集合を \mathbb{N} で表す.
- (2) 整数全体. この集合を \mathbb{Z} で表す.
- (3) 有理数全体. この集合を \mathbb{Q} で表す.
- (4) 実数全体. この集合を \mathbb{R} で表す.
- (5) 身長 10m 以上の女性全体
- (6) 大きい数全体
- (7) めちゃめちゃインパクトが強い人全体

集合 \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} は次のように表される.

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \dots\} = \{x \mid x \text{ は自然数である} \} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} = \{x \mid x \text{ は整数である} \} \\ \mathbb{Q} &= \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\} = \{x \mid x \text{ は有理数である} \}\end{aligned}$$

例 2.2. a, b を $a < b$ を満たす実数とする. このとき実数の集合 \mathbb{R} の部分集合である開区間 (a, b) , 左開区間 (右閉区間) $(a, b]$, 右開区間 (左閉区間) $[a, b)$, 閉区間 $[a, b]$ を次で定義する.

$$\begin{aligned}(a, b) &= \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}, & (a, b] &= \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\} \\ [a, b) &= \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}, & [a, b] &= \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}\end{aligned}$$

注意 2.3. 空集合 \emptyset は要素を全く含まない集合である. すなわち $\emptyset = \{ \}$ である. 時々, 空集合を $\{\emptyset\}$ と書き間違える人を見かける. これは空集合ではない, 空集合 \emptyset を要素として含む集合で, ただ一つの要素 \emptyset からなる.

注意 2.4. A が B の真部分集合の時 $A \subsetneq B$ と表されるが, $A \subset B$ も間違いではない. これは $1 < 2$ ではあるが $1 \leq 2$ としても間違いではないということと同じである.

問 2.1. 4 の倍数の集合は偶数の集合の部分集合であることを示せ.

問 2.2. A が B の部分集合で, B が C の部分集合であるなら, A は C の部分集合であることを示せ: $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$

注意 2.5. x が集合 A の要素であり, A が集合 X の要素でも, x は X の要素であるというわけではない. すなわち, 「 $x \in A, A \in X \Rightarrow x \in X$ 」は一般には成り立たない.

例 2.6. 空集合 \emptyset は任意の集合 A の部分集合である: $\emptyset \subset A$.

これは次のようにして示される. $\emptyset \subset A$ とは 「 $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ 」を意味する. ここで 「 $x \in \emptyset$ 」を $P(x)$ とし, 「 $x \in A$ 」を $Q(x)$ とすると, 「 $P(x) \Rightarrow Q(x)$ 」ということである. しかし, $P(x)$ は任意の x に対して偽である. よって命題 「 $P(x) \Rightarrow Q(x)$ 」は $Q(x)$ の真偽にかかわらず常に真になる. つまり, $\emptyset \subset A$ が成り立つということである.

問 2.3. $\{1, 2, 2\} = \{1, 2\}$ を示せ.