

【基本的な公式】 任意の命題 P, Q, R に対して次が成り立つ.

- (1) $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$
- (2) $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
- (3) $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
- (4) $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$
- (5) $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$
- (6) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee Q$
- (7) $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
- (8) $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
- (9) $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
- (10) $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

問 1.5. 任意の命題 P, Q に対して次が成り立つことを示せ.

- (1) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$ (対偶律)
- (2) $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg P) \Leftrightarrow (\neg Q))$
- (3) $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge (\neg Q)$

問 1.6. 次の命題の否定を述べよ.

- (1) 僕はサッカーが好きではない.
- (2) 彼は AKB48 か乃木坂 46 のどちらかが好きだ.
- (3) 「大学基礎論」と「英会話」を落とした..
- (4) 僕は昨日穴に落ちたけど、君は 1000 円か 5000 円を落とした.
- (5) ごんべが種まきやカラスがほじくる.
- (6) 彼はサッカー部に入るか、茶道部に入って高い茶器を買うかのどちらかだ.
- (7) 君がかつ丼を食べれば、僕は超大盛り豪華かつ定食とレパニラ炒めを食べる.
- (8) かつ丼が 500 円で食べられれば、僕は 2 杯か 3 杯食べるつもりだ.

問 1.7. 次の命題の対偶を述べよ.

- (1) 元気があれば何でもできる.
- (2) 明日の試験で合格点が取れれば、追試を受けなくてもいいし遊びに行けるのに.
- (3) 君がデートをしてくれるなら、バックかアクセサリをプレゼントするよ.
- (4) 炬燵で丸くなっているか庭を駆け回っているなら、それは猫か犬だ.

問 1.8. 自分の子供に「勉強しなさい、勉強しなさい」と小言を言う母親をよく見かける. 「文句ばかり言わないでくれよ」と口答えをすると「お前が勉強しないから私が文句を言うんでしょ、お前が勉強さえすれば文句は言いません」とさらにエスカレートする. それでは、お母さんの言っていることの対偶を述べよ.

「任意」と「存在」 次の2つの命題を考える.

- 任意の奇数 x に対し、 x^2 は4で割ると1余る
- x^2 が正にならない整数 x が存在する.

最初の命題を証明するとき、たとえば $x = 1$ のとき、 $x = 3$ のとき、 $x = 5$ のときというように、いろいろな奇数を当てはめて考えても意味がなく、無限にある奇数すべてに通用する議論が必要になる.

一方、2番目の命題は、すべての整数 x に対し x^2 が正にならないことを示すのではなく、一つでも x^2 が正にならない整数 x が見つければよい. よって「 $x = 0$ のときに $x^2 = 0$ となり正ではない」と言えば、それで証明になる.

逆に、上の命題が偽であることを示すには、それらの否定を示せばよいのだから、最初の命題では「 x^2 を4で割ったあまりが1ではない奇数 x が存在する」ことを示すことになる. これは、無限の場合を考える必要はなく、一つの例を挙げればよいことになる. (実際にはそんな例はないのだが)

同様に2番目の命題の否定は「任意の整数 x に対し、 x^2 は正になる」ということを示すことが偽であることを示すことになる. (これも示すことは不可能だ)