6　集積点，孤立点，閉包，開核

6.1　基本事項

X を位相空間とし，A をその部分集合とする．

- X の点 p が A の**集積点**であるとは，p の任意の近傍 G に対して $G \cap (A - \{p\}) \neq \emptyset$ が成り立つときをいう．A のすべての集積点の集合を A の**導集合**といい，$D(A)$ で表す．

- A の点 p が A の**孤立点**であるとは，$G \cap (A - \{p\}) = \emptyset$　すなわち　$G \cap A = \{p\}$ が成り立つような p の近傍 G が存在するときをいう．つまり，孤立点とは集積点ではない A の点のことをいう．孤立点だけから成る集合を A の**孤立集合**という．

- A を含む閉集合全体の共通部分を A の**閉包**とよび $\bar{A}$ で表す．A に含まれる開集合全体の和集合を A の**開核**とよび $\operatorname{Int} A$ で表す．$\operatorname{Int} A$ に含まれる点を，A の**内点**とよび，$X - A$ の内点，すなわち $\operatorname{Int}(X - A)$ に含まれる点を，A の**外点**とよぶ．内点でも外点でもない点を A の**境界点**とよび，境界点の集合を A の**境界**とよび ∂A で表す．

- $\bar{A} = X$ となるとき，A は X で**稠密**であるという．

注意 6.1. (1) A の集積点は必ずしも A の点ではないが，A の孤立点は A の点である．

(2) A の閉包 $\bar{A}$ は A を含む最小の閉集合である．すなわち，次の性質が閉包を特徴づけている：

> $\bar{A}$ は $A \subset \bar{A}$ を満たす閉集合で，$A \subset F$ を満たす任意の閉集合 F に対して $\bar{A} \subset F$ が成り立つ．

(3) 同様に，A の開核 $\operatorname{Int} A$ は A に含まれる最大の開集合である．すなわち，次の性質が開核を特徴づけている：

> $\operatorname{Int} A$ は $\operatorname{Int} A \subset A$ を満たす開集合で，$G \subset A$ を満たす任意の開集合 G に対して $G \subset \operatorname{Int} A$ が成り立つ．

6.2　演習問題

例題 6.1. 1 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^1$ において次を示せ.

1. $A = [0,1)$ の集積点とは $0 \leq x \leq 1$ を満たす実数 x である．よって $D(A) = [0,1]$ となる．また孤立点は存在しない.

2. 任意の実数が有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ の集積点になる．よって $D(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{R}^1$ となる．また孤立点は存在しない.

3. 整数の集合 $\boldsymbol{Z}$ の集積点は存在しない．よって $D(\boldsymbol{Z}) = \emptyset$ となる．また，任意の整数が $\boldsymbol{Z}$ の孤立点なので，$\boldsymbol{Z}$ の孤立集合は $\boldsymbol{Z}$ 自身である.

例題 6.2. 1 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}$ において次を示せ,

1. $\overline{(a,b)} = \overline{[a,b]} = \overline{(a,b]} = \overline{[a,b)} = [a,b]$

2. $\mathrm{Int}\,(a,b) = \mathrm{Int}\,[a,b] = \mathrm{Int}\,(a,b] = \mathrm{Int}\,[a,b) = (a,b)$

3. $\overline{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{Z}, \quad \mathrm{Int}\,\boldsymbol{Z} = \emptyset$

4. $\overline{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{R}, \quad \mathrm{Int}\,\boldsymbol{Q} = \emptyset$

例題 6.3. 集合 $X = \{a,b,c,d\}$ の位相が $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, X\}$ で与えられているとする．X の部分集合 $A = \{a,b,d\}$ の集積点および孤立点をすべて求めよ．また，A の閉包 $\bar{A}$ および開核 $\mathrm{Int}\,A$ を求めよ.

問 6.1. 集合 $X = \{a,b,c,d\}$ の位相が $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, X\}$ で与えられているとする．X の部分集合 $\{a,d\}$ の集積点および孤立点をすべて求めよ．また，閉包 $\overline{\{b\}}$ および開核 $\mathrm{Int}\,\{a,c,d\}$ を求めよ.

問 6.2. 集合 $X = \{a,b,c,d\}$ の位相が $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, X\}$ で与えられているとする．X の部分集合 $\{a,c,d\}$ の集積点および孤立点をすべて求めよ．また，閉包 $\overline{\{a,c\}}$ および開核 $\mathrm{Int}\,\{a,c\}$ を求めよ.

問 6.3. 集合 $X = \{a,b,c,d\}$ の位相が $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, X\}$ で与えられているとする．X の部分集合 $A = \{a,c\}$ の集積点および孤立点をすべて求めよ．また，A の閉包 $\bar{A}$ および開核 $\mathrm{Int}\,A$ を求めよ.