

## 5 相対位相, 部分空間

### 5.1 基本事項

$X$  を位相  $\mathcal{T}$  をもつ位相空間とし,  $A$  を  $X$  の空でない部分集合とする.  $A$  の部分集合の族

$$\mathcal{T}_A = \{G \cap A \mid G \in \mathcal{T}\}$$

は  $A$  の位相となる. これを  $A$  の  $X$  に関する**相対位相**といい, 相対位相をもつ位相空間  $A$  を  $X$  の**部分位相空間** (あるいは単に**部分空間**) という.

**注意 5.1.** 位相空間  $X$  の部分空間  $A$  に対し,  $A$  の開集合は  $X$  の開集合であるとは限らない.

**例 5.1.** 1次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^1$  の部分空間  $A = [0, 2)$  を考える.  $B_1 = [0, 1)$ ,  $B_2 = [1, 2)$  とする.

1.  $B_1, B_2$  は共に  $\mathbf{R}^1$  の開集合でも閉集合でもない.
2.  $B_1$  は  $A$  の開集合であるが閉集合でない.
3.  $B_2$  は  $A$  の閉集合であるが開集合でない.

**例 5.2.** 離散空間の任意の部分空間は離散空間である. また, 密着空間の任意の部分空間は密着空間である.

### 5.2 演習問題

**例題 5.1.** 集合  $X = \{a, b, c\}$  の位相が  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, X\}$  で与えられているとき,  $X$  の部分集合  $A = \{a, b\}$  の相対位相を求めよ. また,  $A$  の閉集合をすべて求めよ.

**問 5.3.** 集合  $X = \{a, b, c\}$  の位相が  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, X\}$  で与えられているとき,  $X$  の部分集合  $A = \{b, c\}$  の相対位相を求めよ. また,  $A$  の閉集合をすべて求めよ.

**問 5.4.** 集合  $X = \{a, b, c, d, e\}$  の位相が  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, X\}$  で与えられているとき,  $X$  の部分集合  $A = \{b, c, e\}$  の相対位相を求めよ. また,  $A$  の閉集合をすべて求めよ.

**問 5.5.** 位相空間  $X$  の部分空間  $A$  に対し,  $X$  の開集合  $G$  が  $A$  の部分集合であるなら,  $G$  は  $A$  の開集合でもあることを示せ.

**問 5.6.** 位相空間  $X$  の部分空間  $A$  が  $X$  の開集合なら,  $A$  の部分集合  $G$  が  $A$  の開集合であることと  $X$  の開集合であることは必要十分であることを示せ.