

4 位相空間

4.1 基本事項

- 空でない集合 X の位相とは X の部分集合の族 \mathcal{T} で次を満たすものをいう.

$$[\mathbf{O}_1] \quad X \in \mathcal{T} \text{ かつ } \emptyset \in \mathcal{T}$$

$$[\mathbf{O}_2] \quad U_i \in \mathcal{T} \ (i = 1, \dots, n) \implies \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$$

$$[\mathbf{O}_3] \quad U_\lambda \in \mathcal{T} \ (\lambda \in \Lambda) \implies \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{T}$$

位相が与えられた集合 X を位相空間という. また, 位相 \mathcal{T} の要素を X の開集合という.

- 位相空間 X の任意の点 $x \in X$ に対し, $x \in U$ を満たす X の開集合 U を x の近傍と呼ぶ.
- 位相空間 X の部分集合 F が閉集合であるとは, その補集合 $X - F$ が開集合のときをいう.

注意 4.1. 距離空間 X では, 距離 d を用いて, X の各部分集合が開集合であるかどうかを判定する規則が与えられた. そして, その規則に沿って与えられた開集合に対し, 教科書の定理 5.2 が成り立った.

一方, 距離が定義されていない集合に対しても, 距離以外の方法で開集合かどうかを判断する規則が与えられ, その規則に沿って与えられた開集合に対し, 教科書の定理 5.2 が成り立つようにできるとき, 距離空間と同様なさまざまな性質について議論が展開できる. そこで, 定理 5.2 の性質を公理系 $[\mathbf{O}_1]$ – $[\mathbf{O}_3]$ として位相という概念を定義するのである.

例 4.1. 1次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^1 における開集合とは, 开区間 $(a, b) = \{x \mid x \in \mathbf{R}^1, a < x < b\}$ の和集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda, b_\lambda)$ で表される部分集合である.

例 4.2. 空でない集合 X の部分集合全体からなる族は位相になる. この位相を X の離散位相という. 離散距離空間においては, 距離を用いて定義される位相が離散位相になっている.

例 4.3. 空でない集合 X の部分集合の族 $\{X, \emptyset\}$ は位相になる. この位相を X の密着位相という.

例 4.4. 位相の定義における条件 $[\mathbf{O}_2]$ は次の条件に置き換えることができる.

$$[\mathbf{O}_2'] \quad U_1, U_2 \in \mathcal{T} \implies U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$$

実際, $[\mathbf{O}_2]$ が成り立てば $[\mathbf{O}_2']$ が成り立つのは明らかである. 一方で, $[\mathbf{O}_2']$ が成り立てば, 帰納法を用いて $[\mathbf{O}_2]$ が成り立つことも証明できる.

例 4.5. 位相空間 X の点 x に対し, x の近傍は一つではない. 極端な例として, X 自身も x の近傍の一つである.

4.2 演習問題

例題 4.1. 集合 $X = \{a, b\}$ に定めることのできる位相をすべて求めよ.

例題 4.2. 集合 $X = \{a, b, c\}$ の部分集合の族 $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, X\}$ は X の位相になるか. 位相になるなら, 閉集合をすべて求めよ. 位相でないなら, X の部分集合をいくつか加えて位相になるようにせよ.

例題 4.3. 集合 $X = \{a, b, c\}$ の部分集合の族 $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, X\}$ は X の位相になるか. 位相になるなら, 閉集合をすべて求めよ. 位相でないなら, X の部分集合をいくつか加えて位相になるようにせよ.

問 4.6. 集合 $X = \{a, b, c\}$ の部分集合の族 $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, X\}$ は X の位相になるか. 位相になるなら, 閉集合をすべて求めよ. 位相でないなら, X の部分集合をいくつか加えて位相になるようにせよ.

問 4.7. 集合 $X = \{a, b, c\}$ の部分集合の族 $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ は X の位相になるか. 位相になるなら, 閉集合をすべて求めよ. 位相でないなら, X の部分集合をいくつか加えて位相になるようにせよ.

問 4.8. 集合 $X = \{a, b, c, d, e\}$ の部分集合の族 $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{e\}, \{b, c\}, \{a, b, c, e\}, X\}$ は X の位相になるか. 位相になるなら, 閉集合をすべて求めよ. 位相でないなら, X の部分集合をいくつか加えて位相になるようにせよ.

問 4.9. 集合 $X = \{a, b, c, d, e\}$ の部分集合の族 $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, X\}$ は X の位相になるか. 位相になるなら, 閉集合をすべて求めよ. 位相でないなら, X の部分集合をいくつか加えて位相になるようにせよ.

問 4.10. 実数の集合 \mathbf{R} の部分集合の族 $\mathcal{T} = \{(a, \infty) \mid -\infty \leq a \leq \infty\}$ は \mathbf{R} の位相になるか. ただし, $(-\infty, \infty) = \mathbf{R}$, $(\infty, \infty) = \emptyset$ と考える.

問 4.11. 実数の集合 \mathbf{R} の部分集合の族 $\mathcal{T} = \{[a, \infty) \mid -\infty \leq a \leq \infty\}$ は \mathbf{R} の位相になるか. ただし, $[-\infty, \infty) = \mathbf{R}$, $[\infty, \infty) = \emptyset$ と考える.

問 4.12. X を空でない集合とする. $X - G$ が, X 自身であるか高々有限な集合であるような X の部分集合 G 全体の族 \mathcal{T} は, X の位相になることを示せ. ただし, 空または有限である集合を高々有限な集合と呼ぶ.

例題 4.4. 位相空間 X の点 $x \in X$ に対し, x の有限個の近傍の共通集合は x の近傍になることを示せ. また, 任意個の近傍の共通集合は必ずしも x の近傍になるとは限らないことを, 例を与えることにより示せ.

問 4.13. 位相空間 X が有限集合のとき, 任意の $x \in X$ に対し, x のすべての近傍の共通集合も x の近傍になることを示せ.