

### 3 距離空間

#### 3.1 基本事項

1. 集合  $X$  上の距離とは、写像  $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  で次の距離の公理を満たすものをいう.

$$[\mathbf{M}_1] \quad d(x, y) \geq 0 \quad (\forall x, y \in X)$$

$$[\mathbf{M}_2] \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$[\mathbf{M}_3] \quad d(x, y) = d(y, x) \quad (\forall x, y \in X)$$

$$[\mathbf{M}_4] \quad d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \quad (\forall x, y, z \in X)$$

距離が与えられている集合を距離空間とよぶ.

2. ユークリッド空間と同様に、正の数  $\varepsilon$  と点  $x \in X$  に対し  $X$  の部分集合  $U(x; \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$  を  $x$  の  $\varepsilon$  近傍とよぶ.
3.  $X$  の部分集合  $G$  が開集合であるとは、任意の  $x \in G$  に対し、 $U(x; \varepsilon) \subset G$  となる正の数  $\varepsilon$  が存在するときをいう. また、 $X$  の部分集合  $F$  が閉集合であるとは、 $X - F$  が開集合のときをいう.
4. 距離空間  $X$  の開集合に関して、次が成り立つ.
  - (a)  $X$  および空集合  $\emptyset$  は開集合である.
  - (b) 有限個の開集合  $U_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) に対し、その共通集合  $\bigcap_{i=1}^n U_i$  は開集合である.
  - (c) 任意個の開集合  $U_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) に対し、その和集合  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  は開集合である.

**注意 3.1.** 与えられた集合上に定義される距離は一通りではない. たとえば、 $\mathbf{R}^n$  においても、ユークリッド距離は最も標準的なものであるというだけで、他にもいろいろ距離は考えられる. 例えば、 $d(x, y) = 0$  ( $x = y$ );  $= 1$  ( $x \neq y$ ) と定めると、これも距離になる. これを離散距離という. (離散距離は、 $\mathbf{R}^n$  上のみでなく、任意の集合上で定義されることに注意)

**注意 3.2.** 距離空間において開集合の無限個の共通集合は開集合になるとは限らない. たとえば、1次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}$  において、开区間  $G_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 1 + 1/n\}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) はすべて開集合であるが、それらの共通集合  $\bigcap_{n \geq 1} G_n$  は開集合にならない.

### 3.2 演習問題

問 3.1. 次のように定義された  $\mathbf{R}^2$  の距離に関し、原点から距離 1 の点の集合はどのようなになるか.

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

問 3.2. 次のように定める写像  $d: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  は  $\mathbf{R}^n$  の距離になることを示せ.

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

問 3.3. 上の問題において  $n = 2$  のとき、原点から距離 1 の点の集合はどのようなになるか.

問 3.4. 次のように定める写像  $d: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  は  $\mathbf{R}^n$  の距離にならないことを示せ.

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \min\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

問 3.5.  $\mathbf{R}^2$  における離散距離について、原点から距離 1 の点の集合、原点から距離 2 の点の集合、および原点から距離 3 の点の集合は、それぞれどのようなになるか.

問 3.6.  $X$  を任意の空でない集合とし、 $c$  を正の実数とする. 次のように定義された写像  $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  は  $X$  上の距離になるか.

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ c & x \neq y \end{cases}$$

問 3.7. 距離空間  $X$  の異なる 2 点  $x_1, x_2 \in X$  に対し、 $U(x_1; \varepsilon_1) \cap U(x_2; \varepsilon_2) = \emptyset$  となる正の実数  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  が存在することを示せ.

問 3.8. 離散距離空間では、任意の部分集合が開集合になることを示せ.

問 3.9.  $X$  を距離  $d$  を持つ距離空間とする. 任意の  $x \in X$  および、任意の正の数  $\varepsilon$  に対し、 $D(x; \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$  および  $S(x; \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) = \varepsilon\}$  は閉集合であることを示せ.

問 3.10. 距離  $d$  を持つ距離空間  $X$  において、一点からなる集合  $\{x\}$  は閉集合であることを示せ.

問 3.11. 距離空間  $X$  において、有限個の閉集合  $F_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) の和集合  $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$  は閉集合になることを示せ.

問 3.12. 距離空間  $X$  において、任意個の閉集合  $F_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) の共通集合  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$  は閉集合になることを示せ.