2　ユークリッド距離空間

2.1　基本事項

1. $\boldsymbol{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \boldsymbol{R}\}$ の 2 点 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ に対し，その間の距離 $d(x, y)$ を
$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$
で定義する．この距離 d を**ユークリッド距離**とよび，このように距離が定義された集合 $\boldsymbol{R}^n$ を n 次元**ユークリッド空間**とよぶ．

2. ユークリッド距離に対し，距離の公理と呼ばれる次の性質が成り立つ．
   (a) $d(x, y) \geq 0$
   (b) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
   (c) $d(x, y) = d(y, x)$
   (d) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

3. 点 $x \in \boldsymbol{R}^n$ に対し，$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 $U(x; \varepsilon) = \{y \in \boldsymbol{R}^n \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ を x の ε **近傍**とよぶ．ただし，ε は正の数である．

4. $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 G が**開集合**であるとは，任意の $x \in G$ に対し，$U(x; \varepsilon) \subset G$ となる正の数 ε が存在するときをいう．また，$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 F が**閉集合**であるとは，$\boldsymbol{R}^n - F$ が開集合のときをいう．

注意 2.1. $n = 1$ のときのユークリッド距離は，$d(x, y) = |x - y|$ $(x, y \in R)$ である．

注意 2.2. 1 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^1$ において，点 $a \in \boldsymbol{R}$ の ε 近傍は開区間 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ である．

注意 2.3. $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 F が開集合でない必要十分条件は，点 $x_0 \in F$ が存在し，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$U(x_0; \varepsilon) \not\subset F$ となることである．

2.2　演習問題

例題 2.1. $\boldsymbol{R}^2$ の 2 点 $x = (1, 2)$, $y = (-1, -3)$ に対し，距離 $d(x, y)$ を求めよ．

問 2.1. $\boldsymbol{R}^3$ の 2 点 $x = (1.5, 0, -\sqrt{3})$, $y = (-1, 3.2, 0)$ に対し，距離 $d(x, y)$ を求めよ．

問 2.2. $\boldsymbol{R}^4$ の 2 点 $x = (1, 2, 3, 4)$, $y = (-1, 0.3, -1)$ に対し，距離 $d(x, y)$ を求めよ．

例題 2.2. $\boldsymbol{R}^2$ の 2 点 $x = (1, 2)$, $y = (t, -2)$ に対し $d(x, y) = 5$ である時，t の値を求めよ．

問 2.3. $\boldsymbol{R}^3$ の 2 点 $x = (1, 0, t)$, $y = (t, 3, -1)$ に対し $d(x, y) = 5$ である時，t の値を求めよ.

問 2.4. $\boldsymbol{R}^n$ の任意の 4 点 x, y, z, w に対して，次が成り立つことを示せ.

$$|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w)$$

問 2.5. $\boldsymbol{R}^n$ の任意の 4 点 x, y, z, w に対して，次が成り立つことを示せ.

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

問 2.6. 集合 X から $\boldsymbol{R}^n$ への単射 $f \colon X \to \boldsymbol{R}^n$ が与えられたとき，$x, y \in X$ に対し，$d'(x, y) = d(f(x), f(y))$ と定めると，d' は距離の公理を満たすことを示せ.

問 2.7. 上の問において，f が単射でないとき，距離の公理の中でどの性質が成り立たないか.

例題 2.3. $\boldsymbol{R}^2$ において，原点の ε 近傍 $(\varepsilon > 0)$ はどのようになるか.

問 2.8. $\boldsymbol{R}^n$ の 2 点 x, y に対し,「任意の $\varepsilon > 0$ に対し $y \in U(x; \varepsilon) \Longleftrightarrow x = y$」を示せ.

問 2.9. $\boldsymbol{R}^n$ の 2 点 x, y に対し,「$y \in U(x; \varepsilon) \Longleftrightarrow U(y; \delta) \subset U(x; \varepsilon)$ となる $\delta > 0$ が存在する」を示せ.

例題 2.4. 1 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^1$ において，任意の開区間 (a, b) は開集合であることを示せ.

例題 2.5. 2 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^2$ において，円の内部 $\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r\}$ および長方形の内部 $\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid a_1 < x < b_1,\ a_2 < y < b_2\}$ は開集合であることを示せ.（これは，n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ においても同様である.）

例題 2.6. $\boldsymbol{R}$ の部分集合 $F = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ は開集合でないことを示せ.

問 2.10. $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $G = \{(x, y) \mid -1 < x < 1,\ -1 < y < 1\}$ は開集合であることを示せ.

問 2.11. 2 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^2$ において，境界を含む円の内部 $\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r\}$ や境界を含む長方形の内部 $\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid a_1 \leq x \leq b_1,\ a_2 \leq y \leq b_2\}$ は開集合ではないことを示せ.

例題 2.7. $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 G に対し，次の 2 条件は同値であることを示せ.

(1) G は開集合である,

(2) $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と，各 $\lambda \in \Lambda$ に対し定義される正の数 ε_λ が存在して，$G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U(x_\lambda; \varepsilon_\lambda)$ と表される.